

Dinámica de Modelos Klein-Gordon No Lineales Desordenados

Angel Sánchez Sánchez

Dinámica de Modelos Klein-Gordon No Lineales Desordenados

*Memoria que presenta para optar al grado de
Doctor en Ciencias Físicas*

Angel Sánchez Sánchez

Dirigida por el profesor

Luis Vázquez Martínez

Departamento de Física Teórica I
Facultad de Ciencias Físicas
Universidad Complutense

Mayo 1991

a Carmiña Castro Retén

Agradecimientos

“No —dijo Claude—. Gracias —el guardián se encaminó hacia la puerta—. Para lo del dinero, diríjase a mi abogado.”

Boris Vian, *El Otoño en Pekin*.

Esta tesis es fruto de mi trabajo, pero también del de todos cuantos me han ayudado de una forma u otra, así que no sería justo con ellos si no les reconociera y agradeciera aquí su contribución. Quiero empezar a hacerlo por mis padres, a quienes debo mucho por muchas razones. Por un lado, el que me haya pasado todos estos años estudiando física es, sobre todo, una consecuencia de la educación que me dieron —bueno, no estoy muy seguro de querer agradecerse; más televisión y menos libros hubieran hecho mi vida más sencilla—; por otro, su ánimo y apoyo, tanto moral como económico, me han sido realmente imprescindibles. Pobre pago para tan gran deuda son estas frases, pero *é o que hai, así que...*

Si mis padres me educaron con espíritu crítico y abierto, Luis Vázquez me ha dirigido de la misma manera. He aprendido mucho de él y con él; además, ha estado siempre atento a ampliar mi formación, relacionándose con los mejores investigadores del campo y peleando con la burocracia para conseguirme dinero para congresos y escuelas, por no hablar de máquinas para trabajar; en resumen, poniendo toda la carne en el asador. Y a propósito de carnes y asadores, vaya también mi gratitud a Carlos Tejero, con quién me inicié en la investigación —y no seguí por causas ajenas a ambos— y que, a través de la relación que he mantenido con él y su grupo, ha contribuido a que no me encasillase en algo demasiado específico.

Como acabo de decir, algo muy importante que debo a Luis es haberme puesto en contacto con muchas personas de gran valía científica. De ellas he de destacar a Sergei Gredeskul, Yuri Kivshar y Volodya Konotop, con los

que he colaborado en varias ocasiones. La mayoría de esas colaboraciones tienen mucho que ver con esta tesis, y todas han servido para transmitirme conocimiento, método y pasión por el trabajo. Y, aunque a este nivel pueda sonar un poco absurdo —y aunque el tiempo y la historia vayan haciendo cambiar las opiniones sobre las personas—, me siento obligado a agradecer a la *perestroika* de Mikhail Gorbachov el haber podido aprender de Sergei, Yuri y Volodya.

Ha habido también otras personas con las que he investigado en otros temas que no tienen relación con lo que cuento aquí, pero que lógicamente han influido en lo que haya podido llegar a saber sobre física y sobre cómo hacerla. Mi agradecimiento por ello a Francisco Domínguez-Adame y a Jean Guy Caputo, que sufrieron mi torpeza, mis errores y mis brillantes ideas.

Bueno, pues los esfuerzos y sudores de toda esta gente para hacer algo de mí como investigador hubieran sido en balde de no ser por la ayuda de mis amigos. Si amigo es aquél que está al lado de uno cuando las cosas van mal, tengo la inmensa suerte de tener varios. Como Rosalía Serna, para la que tengo muchos motivos de agradecimiento —y lo mismo para con su familia, en especial Josefina, que me aguantaron pacientemente—, y Rubén Pérez —otra familia a la que caí en suerte—, que me empujaron siempre hacia delante incluso contra mi propia oposición —la misma pregunta, ¿debo darles las gracias?—. Por su parte, Leonor Tabernero y Susana Gilardi me apoyaron siempre que las dejé, y Ricardo Brito, Jose Olarrea y Marco Brummelhuis soportaron estoicamente mis lloros, lamentaciones, peticiones de favores y demás. A menudo, les ayudaron Pepe Aranda, Angel Pascual, Jose Cuesta y Julio Serna, y también Juanma Parrondo, Lurdes Araújo, Manuel Mañas y Rodrigo Moreno. Además, tengo que agradecer a otros buenos amigos el que no me mandaran a tomar viento fresco en vista del poco tiempo que les dedicaba —en parte por culpa de esta tesis— pero con los que he estado muy unido, como Suso Bande, José Carlos Collado, Vicente García y Javi Jañez. Y a Isa Durán, que entre otras muchas cosas me enseñó que, a veces, la amistad y la vida no son tan retorcidas como yo creía.

Por demás, el ambiente en el que me encontré en los Departamentos de Física Teórica I y II fue muy grato gracias a mucha gente. Mencionarlos a todos sería extenderme más aún de lo que lo estoy haciendo, así que sólo diré “gracias a todos”. Cito en particular a Manolo González y Juan Jesús Ruiz, porque les tocó soportarme más que a los demás, y a Chon Iglesias, por varias razones —entre ellas, apoyo étlico—.

En otro orden de cosas, he de agradecer a Antonio Rañada su apoyo y sus enseñanzas, y a Nieves de Diego su extraordinaria paciencia para mi no

menos extraordinaria capacidad de darle la lata, así como su inestimable colaboración para cumplir con los papeleos, que de no ser por ella me hubieran derrotado.

Concluyo ya, recordando a Ana, César, Tono y Fernando. Tantos años de amistad no se pueden resumir en palabras.

A. S.

Madrid, 24 de mayo de 1991

Está claro que alguien ha tenido que pagar este trabajo. Así que, aunque esté mal visto hablar de dinero, lo menos que puedo hacer es decir quién ha creído —esperemos que acertadamente— que era una buena idea gastarlo en ésto. Los paganos han sido:

- La Universidad Complutense y el Ministerio de Educación a través de sendas becas de Formación de Personal Investigador.
- Los proyectos de la C.I.C. y T. PB86-0005 y MAT90-0544.
- La Acción Integrada Hispano-Francesa “Efecto de una No Linealidad o una Disipación sobre las Propiedades Físicas y Matemáticas de Ciertos Campos Clásicos”.
- El C.I.E.M.A.T., que no pagó pero no cobró tampoco el uso de su IBM 3090 que, para enojo de quienes tenían más derecho a su tiempo, estuvo colapsado muchas veces por mis simulaciones.
- Por último, el *Ettore Majorana Centre for Scientific Culture* y la O.T.A.N. financiaron mi asistencia a dos escuelas, *Special Seminar on Fractals* y *Applications of Statistical and Field Theory Methods to Condensed Matter*, respectivamente, que han significado mucho en la evolución de mi forma de entender este negocio.

Indice

I	Introducción	1
1	Modelos no lineales y desorden	3
1.1	Notas históricas	3
1.2	Principales modelos no lineales	7
1.3	Solitones	12
1.4	Modelos de desorden	16
2	Modelos de Klein-Gordon no lineales	21
2.1	Generalidades	21
2.2	Aplicaciones	24
2.3	Modelos ϕ^4 y sG desordenados	26
2.3.1	Modelo ϕ^4	26
2.3.2	Modelo sine-Gordon	29
2.4	Plan y estructura de la tesis	34
II	Desorden Continuo	39
3	El modelo ϕ^4 bajo fluctuaciones del potencial. Simulaciones	41
3.1	El modelo ϕ^4 estocástico	41
3.2	Aproximación adiabática y ruido débil	47
3.3	Detalles del procedimiento numérico	51
3.3.1	Esquema numérico	52
3.3.2	Promedios y consistencia del esquema	54
3.4	Solitones libres en medio infinito	58
3.4.1	Régimen de ruido débil	60
3.4.2	Régimen de ruido fuerte	63
3.5	Medio infinito disipativo	70
3.6	Medios finitos. Fronteras	74
4	El modelo ϕ^4 bajo fluctuaciones del potencial. Teoría	83
4.1	Teoría general de perturbaciones seculares	83
4.2	Los modos de excitación y sus contribuciones	87
4.2.1	Modo de traslación	89
4.2.2	Modos interno y de radiación	92
4.3	Interacción de los <i>kinks</i> con las fronteras	96

4.4	Teoría lineal de la radiación	102
5	El modelo ϕ^4 con potencial inhomogéneo	107
5.1	Introducción	107
5.2	Simulaciones	108
5.3	Aproximación analítica	119
III	Desorden Puntual	123
6	Interferencia resonante en colisiones <i>kink</i>-impureza	125
6.1	Introducción	125
6.2	El modelo sG y su simulación	128
6.3	Resultados y discusión	130
7	Excitaciones pequeñas en sistemas inhomogéneos	141
7.1	Introducción	141
7.2	La ecuación de Schrödinger cúbica	142
7.2.1	Generalidades	142
7.2.2	Problemas de Schrödinger lineales: localización	143
7.2.3	Problemas de Schrödinger no lineales	145
7.3	Derivación de la ecuación NLS	147
7.4	<i>Scattering</i> de ondas y paquetes lineales	148
7.5	<i>Scattering</i> de solitones NLS	151
7.5.1	Aproximación de colisiones independientes	151
7.5.2	Cálculo de coeficientes de reflexión	153
7.5.3	Ecuaciones de evolución de los parámetros del solitón	155
7.5.4	Comportamiento cerca del parámetro crítico	160
IV	Conclusión	165
8	Conclusiones. Cuestiones abiertas	167
8.1	Conclusiones	167
8.2	Cuestiones abiertas	170
	Referencias	173
	Referencias básicas de la tesis	173
	Referencias generales	175

Índice de figuras

3.1	El Potencial ϕ^4	42
3.2	La molécula de trans-poliacetileno, $(CH)_x$	43
3.3	Solitones en trans-poliacetileno, $(CH)_x$	46
3.4	Estudio del número de realizaciones	55
3.5	Comprobación de la ecuación PMR	57
3.6	Régimen de ruido débil. Perfiles	61
3.7	Régimen de ruido débil. Coordenadas colectivas	62
3.8	<i>Kink</i> lento en ruido fuerte. Perfiles	64
3.9	<i>Kink</i> lento en ruido fuerte. Coordenadas colectivas	65
3.10	<i>Kink</i> rápido en ruido fuerte. Perfiles	67
3.11	<i>Kink</i> rápido en ruido fuerte. Coordenadas colectivas	68
3.12	<i>Kink</i> en ruido muy fuerte. Energía	69
3.13	Desviación de la predicción adiabática	70
3.14	Exponente de la energía	71
3.15	<i>Kink</i> en medio disipativo. Perfiles	72
3.16	<i>Kink</i> en medio disipativo. Coordenadas colectivas	73
3.17	<i>Kink</i> rápido en medio finito. Perfiles	76
3.18	<i>Kink</i> rápido en medio finito. Coordenadas colectivas	77
3.19	Distribución espacial de la energía.	78
3.20	<i>Kink</i> lento en medio finito. Perfiles	80
3.21	<i>Kink</i> lento en medio finito. Coordenadas colectivas	81
4.1	Densidad de energía de la radiación	96
4.2	La función $\Phi(x)$	101
4.3	Evolución temporal efectiva de la velocidad	102
5.1	<i>Kink</i> bajo ruido espacial débil. Coordenadas colectivas	110
5.2	<i>Kink</i> bajo ruido espacial débil. Perfiles	112
5.3	<i>Kink</i> bajo ruido espacial fuerte. Coordenadas colectivas	113
5.4	<i>Kink</i> bajo ruido espacial fuerte. Perfiles	114
5.5	<i>Kink</i> en reposo bajo ruido espacial fuerte	115
5.6	<i>Kink</i> rápido bajo ruido espacial. Coordenadas colectivas	116
5.7	<i>Kink</i> rápido bajo ruido espacial. Perfiles	117
6.1	Reflexión de un <i>kink</i> lento	134

6.2	Reflexión de un <i>kink</i> rápido	135
6.3	Energía emitida tras la colisión con una impureza	136
6.4	Reflexión de <i>kinks</i> de ϕ^4 . Acoplo no lineal.	139
6.5	Reflexión de <i>kinks</i> de ϕ^4 . Acoplo lineal.	140
7.1	Coeficientes para un solitón con α muy pequeño	157
7.2	Coeficientes para un solitón con $1 \sim \alpha < \alpha_c$	158
7.3	Coeficientes para solitones con igual $\alpha > \alpha_c$	159
7.4	Coeficientes para solitones con igual $V(0)$	161
7.5	Coeficientes para solitones con igual $N(0)$	162
7.6	Inestabilidad de α_c	164

“— Mi sistema para resolver todos los problemas —contestó Angel—. He encontrado realmente soluciones para todo. Soluciones excelentes y de elevado rendimiento, pero soy el único que las conoce y no tengo tiempo de enseñárselas a los demás, porque estoy muy ocupado. Trabajo y amo a Rochelle, ¿comprende?

— Hay gentes que hacen muchas más cosas.

— Sí, pero también necesito tiempo para tumbarme boca abajo y babear. Pronto lo haré. Tengo puesta mucha confianza en ese ejercicio.”

Boris Vian, *El Otoño en Pekín*.

I

Introducción

Modelos no lineales y desorden

“Tba mirando al suelo, como es costumbre entre los arqueólogos, gente que no puede andar descuidada, porque con frecuencia un hallazgo es fruto del azar y el azar corretea a ras de tierra, tal como testimonian los escritos del monje Ortopompa, quién vivió en el siglo X, en un convento de barbudos del que llegó a ser el superior, puesto que era el único que sabía caligrafiar.”

Boris Vian, *El Otoño en Pekin*.

1.1 Notas históricas

La naturaleza es esencialmente *no lineal*. Esta sencilla afirmación se puede ilustrar con multitud de ejemplos de la vida cotidiana. Si se estira más allá de un cierto límite un muelle, o un músculo, no recuperará su forma primitiva al liberarlo. Un accidente de tráfico a 100 Km/h no es dos veces más peligroso que uno a 50 Km/h, sino mucho más. La población de lobos en un cierto ecosistema no es simplemente proporcional a la de jabalíes o a la de conejos. Estos hechos son advertidos por cualquier persona, sin necesidad de conocer el significado de la expresión “no lineal”, más técnica. Sin embargo, a la hora de hacer un estudio preciso de los fenómenos naturales, los primeros físicos se encontraron con una grave dificultad: si se es realmente riguroso, y se tiene en cuenta la no linealidad que acabo de mencionar, el planteamiento matemático correspondiente conduce a problemas en general insolubles. En cambio, los problemas lineales son abordables y comprensibles en su totalidad. Ante esta situación, se aceptó la hipótesis de que en un cierto régimen, que usualmente se llama “de pequeñas excitaciones”, los comportamientos no lineales son casi como los lineales. Sobre esta base, se fue construyendo el edificio de la física hasta bien entrado el siglo XX.

La física así elaborada —la *Física Lineal*— proporcionó muy buenos resultados. Tan buenos como para formar en la conciencia de la mayoría de los físicos la creencia de que la no linealidad natural no era tan importante después de todo, y que para tratarla matemáticamente sería suficiente cualquiera de los procedimientos perturbativos que se habían ido elaborando. Por otra parte, es lógico que esa no linealidad sea pequeña, se pensaba, porque de lo contrario destruiría todas las estructuras estables debidas al comportamiento lineal predominante. Así pues, se llegaba a la conclusión de que la *Física Lineal* era capaz de proporcionar el conocimiento necesario para comprender la esencia de las cosas.

Estas ideas se sostuvieron hasta 1955. En realidad, 1955 es una fecha clave debido a un experimento crucial, pero habría que decir que estas ideas se sostuvieron hasta la aparición de los ordenadores, que abrieron la puerta a estudios no perturbativos de la no linealidad. Ese experimento al que me refería fue llevado a cabo en uno de los primeros ordenadores —el MANIAC de Los Alamos National Laboratory— por Fermi, Pasta y Ulam (1955).¹ Ellos estudiaron una cadena de partículas, conectadas vecino a vecino mediante muelles anarmónicos, intentando ver cómo esa anarmonicidad hacía que una excitación inicial de la cadena, en la forma de un modo normal, evolucionaba hacia un estado en el que todos los armónicos superiores estarían excitados, habiéndose repartido la energía disponible entre todos los modos. Para su sorpresa, no ocurrió esto, sino que, aunque los primeros armónicos —hasta el quinto, para ser exactos —se excitaban, periódicamente toda la energía volvía a estar contenida en el inicial. Este resultado era obviamente incompatible con el papel destructor que se había adjudicado a la no linealidad, además de suponer una profunda objeción a la capacidad de las teorías perturbativas para describirla.

La conmoción que produjeron entre la comunidad física los resultados de Fermi, Pasta y Ulam fue enorme. Liberados del obstáculo de los prejuicios, muchos físicos se volcaron en la investigación de la *Física No Lineal*, que se fue estableciendo como una rama fundamental de la física a lo largo de los años 60. A mi modo de ver, de los numerosos descubrimientos que se hicieron en esta época, dos son los más importantes, y de nuevo fueron posibles gracias a la posibilidad de usar ordenadores, eso sí, mucho más potentes que el primitivo MANIAC. El primero de esos descubrimientos

¹ Las referencias se encuentran al final de la tesis, por orden alfabético de autores y año de publicación, y de la misma forma se citan en el texto. Dos citas de los mismos autores y años se distinguen por letras. Para tres o más autores utilizo la forma *et al.*, excepto si da lugar a confusión de varios trabajos.

se debe a Lorenz (1963), un meteorólogo que trabajaba con un sistema de ecuaciones diferenciales —no lineales— para describir el movimiento de la atmósfera, sistema que había derivado de la ecuación de Navier-Stokes mediante simplificaciones muy drásticas. Al resolverlas numéricamente se encontró con que todas las condiciones iniciales conducían al mismo tipo de trayectorias, que evolucionaban en una región muy intrincada —el atractor de Lorenz— del espacio de fases, y que se comportaban de una manera extremadamente errática e impredecible. Este comportamiento, que Lorenz bautizó "*deterministic non-periodic flow*" (Lorenz, 1963) es lo que hoy se conoce simplemente como *caos*, una de las manifestaciones más extrañas y a la vez ubicuas de la no linealidad.

El otro descubrimiento importante constituye la raíz de la parte de la Física No Lineal a la que pertenece esta tesis, y se debe a Zabusky y Kruskal (1965). El objeto de su trabajo era la llamada *ecuación de Korteweg-de Vries* —que se abrevia habitualmente KdV—, propuesta por dichos investigadores (Korteweg y de Vries, 1895) como ecuación de evolución de la onda solitaria que había observado Scott-Russell (1844) —este trabajo se encuentra ampliamente resumido en el texto de Dodd *et al.* (1982)— en un canal de Edinburgh. Zabusky y Kruskal estudiaron numéricamente tal ecuación, y concluyeron que cualquier dato inicial se descomponía en ondas del tipo de la de Scott-Russell. Más aún, esas ondas eran capaces de colisionar unas con otras, interaccionar de una manera complicada y emerger de la interacción con su aspecto primero. Esta propiedad de la ecuación KdV —que es no lineal— supuso el golpe de gracia a la relación que se hacía entre no linealidad y destrucción de estructuras coherentes. Zabusky y Kruskal llamaron a las ondas que habían estudiado *solitones*, debido a que sus propiedades les recordaban a las de las partículas elementales.

A partir de este primer trabajo, la investigación sobre los solitones y los sistemas en los que aparecen ha progresado rápidamente. A mi juicio, se puede dividir la historia de esta investigación en tres grandes períodos. El primero abarcaría los años que van de 1965 a 1973. En este último se publica el hoy famoso *review* de Scott, Chu y McLaughlin, en el que ya se encuentran las bases de todo el trabajo actual. En esta etapa, no sólo el estudio de los solitones había ganado una respetabilidad que en principio se le negaba —hay buenos ejemplos de los problemas que tuvieron los pioneros en Scott (1990)— sino que ya se habían descubierto los más importantes —y más aplicables físicamente— sistemas no lineales con solitones. La segunda época está constituida por el resto de la década de los 70, que se dedicó al desarrollo de las principales herramientas matemáticas para estudiar las

ecuaciones no lineales. Simultáneamente, los modelos no lineales entraron a formar parte de numerosos escenarios físicos, sobre todo en Física de la Materia Condensada —en este sentido, es interesante consultar los *proceedings* editados por Longrenn y Scott (1978), Bishop y Schneider (1978), y Bernasconi y Schneider (1981)—, llegando a convertirse por derecho propio en uno de los paradigmas de la física (Bishop *et al.*, 1980). Por otro lado, es también durante estos años cuando se diseñaron y realizaron los primeros experimentos sobre solitones, que condujeron a una plena confirmación de su existencia real —dos buenos resúmenes del trabajo experimental son los artículos de Remoissenet, (1990a, 1990b)—.

De los tres períodos en que he considerado dividida la historia de los solitones, el último, que no creo que pueda darse aún por cerrado, está transcurriendo actualmente. El interés general de los físicos ha cambiado a lo largo de la pasada década, sobre todo debido a las imperiosas necesidades tecnológicas. Así, aunque el estudio de los llamados *sistemas integrables* —no hay una definición precisa de este concepto, pero por ahora los definiré como aquellos para los que se sabe resolver el problema general de condiciones iniciales— sigue teniendo un importante papel, la mayor parte de los esfuerzos se destinan a investigar esos sistemas bajo todo tipo de perturbaciones, cuyo propósito es hacer cada vez más realistas los modelos. Estas perturbaciones dan lugar a modificaciones drásticas de las propiedades de los sistemas no lineales, y prácticamente siempre los convierten en insolubles. Recientemente, se han propuesto distintas técnicas analíticas aproximadas para este tipo de modelos; además, la disponibilidad de ordenadores y superordenadores ha permitido detallados estudios numéricos. En los últimos años, cada vez es más aceptada la idea de que sólo una adecuada combinación de técnicas analíticas y numéricas —lo que Zabusky (1981) llama “*sinérgica computacional*”— permitirá ulteriores progresos en este campo. Hoy en día se desarrolla una gran actividad en la investigación de la propagación de ondas no lineales en medios desordenados utilizando este procedimiento mixto —ver los *proceedings* editados por Pnevmatikos *et al.* (1989), Bishop *et al.* (1989), Barthes y Léon, (1990), y Abdullaev *et al.* (1991)—.

Un rápido vistazo a los índices de los libros citados permitirá al lector más escéptico convencerse de que la variedad de problemas físicos, químicos, biológicos o tecnológicos que pueden ser abordados con la ayuda de la Física No Lineal es amplísima. Hay una plétora de posibles términos —una relación bastante completa se encuentra en Kivshar y Malomed (1989)— a incluir en cada ecuación, cada uno de los cuales tiene su origen en ciertos

factores que influyen el comportamiento observado de las distintas realizaciones de un mismo modelo no lineal. Vale la pena mencionar en este momento que no sólo existen todas esos términos, sino que la intensidad con que cada uno de ellos entra en juego desempeña un papel clave en la dinámica del modelo, pudiendo originar incluso regímenes caóticos —son buenos *reviews* de fenómenos caóticos en ecuaciones en derivadas parciales los de Zettl (1988), y Reinisch y Fernández (1989), que además contienen muchas referencias interesantes—. Este efecto sugiere —y de hecho así es— que, en presencia de perturbaciones fuertes, resulta una situación que no es en absoluto “la suma de no linealidad y perturbación”, por así decir, sino una cosa muy distinta que proviene de una complicada interacción de ambos constituyentes del modelo, impredecible *a priori*. Por tanto, los problemas correspondientes suelen ser muy difíciles y generalmente requieren el uso de técnicas bastante particulares y sofisticadas. En este sentido, la Física No Lineal está ahora en el mismo punto en que estaba la Física Lineal cuando el experimento de Fermi, Pasta y Ulam arruinó sus cimientos y acabó con la idea de que las no linealidades eran tratables perturbativamente. La diferencia con respecto a entonces es que la experiencia nos enseña a mantener una mentalidad abierta a los fenómenos, cualitativamente nuevos, que puedan ir surgiendo en la investigación de los sistemas no lineales desordenados.

1.2 Principales modelos no lineales

Después de este resumen histórico, surgen inmediatamente dos cuestiones básicas: ¿Cuáles son esos modelos no lineales de los que estoy hablando? ¿Cómo se modela la influencia del desorden en ellos? En esta sección intentaré presentar los más importantes, dónde, como decía más arriba, la importancia se mide en función del número de aplicaciones. He de decir, sin embargo, que, si bien no son las que voy a recoger aquí las únicas ecuaciones no lineales, se da el caso, hasta hoy realmente intrigante, de que cuando uno se plantea estudiar un cierto sistema físico, y hace aproximaciones intentando hacerlo accesible analíticamente, es muy raro que la ecuación que obtenga no sea una de estas que he llamado más importante. Es decir, parece que, por razones no bien entendidas, este puñado de modelos juegan un papel fundamental entre todos los posibles que uno podría escoger.

Empezaré mencionando en primer lugar la clase de ecuaciones a las que pertenecen las que son objeto de estudio en esta tesis: *las ecuaciones de Klein-Gordon no lineales* —a las que me referiré como NKG, utilizando la

abreviatura más habitual, tomada del inglés *Nonlinear Klein-Gordon*—. La expresión matemática común a todas ellas es

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0, \quad (1.1)$$

dónde, de ahora en adelante, denotaré por $\phi \equiv \phi(x, t)$, siendo ϕ real —a no ser que se especifique lo contrario—, mientras que los subíndices x y t denotan las correspondientes derivadas parciales, y $V(\phi)$ es una función no muy patológica de ϕ . La ecuación de Klein-Gordon no lineal más famosa es, sin duda, la de *sine-Gordon* —abreviado, sG—:

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \sin \phi = 0, \quad (1.2)$$

que fue introducida en física por primera vez por Frenkel y Kontorowa (1938) —una referencia más accesible es el libro de Nabarro (1967)— para representar el movimiento de las dislocaciones en los sólidos de forma sencilla. Más adelante hablaré de otras de sus numerosas aplicaciones.

Otro sistema NKG bien conocido, y que es la base de la mayor parte de este trabajo, es el llamado modelo ϕ^4 ,

$$\phi_{tt} + \phi_{xx} - \phi + \phi^3 = 0, \quad (1.3)$$

que debe su nombre a que el potencial $V(\phi)$ del cual deriva contiene un término de orden cuatro. Fue propuesta independientemente por Aubry (1975, 1976) y por Krumhansl y Schrieffer (1975) para describir sistemas que sufren transiciones de fase estructurales.

Para terminar, incluiré una última ecuación que se suele denominar *double sine-Gordon*, dada por

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \sin \phi + \alpha \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) = 0, \quad (1.4)$$

y que ha encontrado su principal aplicación en sistemas magnéticos cuasi-unidimensionales (Zvezdin, 1979; Bar'yakhtar *et al.*, 1980) y en óptica no lineal (Bullough y Caudrey, 1978).

El siguiente ejemplo típico de sistema no lineal es la ecuación conocida habitualmente como de *Schrödinger No Lineal* —abreviado, NLS, del inglés *Nonlinear Schrödinger*; a veces se encuentra referida en la literatura como ecuación de Schrödinger cúbica—, que se escribe

$$i\phi_t \pm \frac{1}{2}\phi_{xx} + |\phi|^2\phi = 0, \quad (1.5)$$

dónde en este caso ϕ es una función compleja de las variables reales (x, t) . Su aplicación fundamental tiene su marco en sistemas débilmente no lineales en los que la dispersión es importante —esto se ve claramente en las derivaciones cualitativas que aparecen en Dodd *et al.* (1982) o en Bass *et al.* (1988)—, aunque también se obtiene a menudo como ecuación de evolución de las excitaciones de pequeña amplitud de las ecuaciones NKG (Newell, 1985; Remoissenet, 1986), motivo por el que volveré sobre este sistema en el capítulo 7, donde también me referiré a su gran utilidad desde el punto de vista aplicado.

Concluiré este “catálogo” de las ecuaciones no lineales más destacadas con una familia más, también arquetípica, cuyo miembro más conocido es la ecuación KdV, de la que ya he dicho que fue la que propició el descubrimiento de los solitones por Zabusky y Kruskal. Su expresión matemática es

$$\phi_t + \phi\phi_x + \phi_{xxx} = 0. \quad (1.6)$$

A la misma familia pertenece su “pariente” cercano, la *ecuación de Korteweg-de Vries modificada* — que se suele denotar mKdV—:

$$\phi_t + \phi^2\phi_x + \phi_{xxx} = 0. \quad (1.7)$$

Estas ecuaciones tienen realmente una relación muy íntima, sacada a la luz por Miura (1968), quién probó que hay una transformación que lleva de soluciones de la ecuación KdV a soluciones de la mKdV, y viceversa. Más aún: ambas ecuaciones se obtienen como límites de la *ecuación Boussinesq generalizada*,

$$\phi_{xx} - \phi_{tt} + \alpha(\phi^2)_{xx} + \beta(\phi^3)_{xx} + \phi_{xxx} = 0, \quad (1.8)$$

que fue estudiada por vez primera —con $\beta = 0$ — por Boussinesq (1872), y de la que se puede decir que ocupa un puesto más alto en la jerarquía KdV. Las ecuaciones KdV y mKdV se obtienen de la de Boussinesq generalizada imponiendo propagación de ondas en una sola dirección con $\beta = 0$ y $\alpha = 0$, respectivamente. Estas tres ecuaciones describen sistemas en los que tanto la no linealidad como la dispersión son débiles. El ejemplo más típico de un tal sistema es el de los modelos de cadenas atómicas unidimensionales con interacciones no lineales entre próximos vecinos (Flytzanis *et al.*, 1985; Davydov, 1985); otra buena realización se encuentra en ondas en plasmas (Whitham, 1974; Makhankov, 1978).

Por último, si en vez de sistemas dispersivos se estudian sistemas débilmente no lineales y disipativos, las más de las veces se recurre a la *ecuación*

de Burgers:

$$\phi_t + \phi\phi_x - \phi_{xx} = 0, \quad (1.9)$$

que fue estudiada por Burgers (1974) como ejemplo más sencillo de ecuación de difusión no lineal.

Como no volveré sobre este último grupo de ecuaciones en el resto del trabajo, parece oportuno incluir aquí una breve digresión acerca de ellas. La característica más importante que tienen en común es que son, en cierto sentido, "fáciles". Con fácil no pretendo en absoluto decir que sean triviales, sino que son las primeras que se han sabido resolver y estudiar en profundidad. Así, la ecuación de Burgers ya se resolvió antes de que él la estudiara, puesto que Cole (1950) y Hopf (1950) propusieron independientemente la transformación que hoy lleva el nombre de ambos para linealizarla y posteriormente resolverla. Por otro lado, la ecuación KdV fue la primera para la que se consiguió construir todas las soluciones vía *Inverse Scattering Transform* (IST) —también llamada *Inverse Spectral Transform*— (Gardner *et al.*, 1967), abriendo la puerta a la potencia que este método ha demostrado a partir de entonces. Pero no es sólo esto lo que me lleva a calificarlas de fáciles, su integrabilidad; es el hecho de que no es raro que cuando estas ecuaciones se perturban, la ecuación nueva resultante sea accesible a tratamiento analítico y a veces incluso integrable. Como ejemplo, citaré los trabajos de Wadati (1983) y Wadati y Akutsu (1984), que resolvieron mediante cambio de variable la ecuación KdV con una perturbación estocástica, y el reciente de Wadati (1990), que hizo lo mismo con la ecuación de Boussinesq.

Los tres grupos de ecuaciones que he citado —NKG, NLS y la familia KdV— son las principales ecuaciones en derivadas parciales no lineales por su importancia y su carácter fundamental. Pero no habría incluido los *modelos* más importantes sin tener en mente ecuaciones en diferencias, es decir, modelos discretos. Los modelos discretos son muy comunes, siendo generalmente la variable que está definida en un retículo la espacial —no hay muchos trabajos en los que ambas variables sean discretas; se pueden ver referencias sobre esto en Herbst *et al.* (1985) o Herbst y Ablowitz (1989a)—. Los problemas discretos surgen por dos motivos: por sí mismos, es decir, cuando se considera un sistema físicamente discreto, como una cadena de partículas, por ejemplo, o bien al discretizar en el espacio una ecuación en derivadas parciales a través de un esquema en diferencias finitas. Muchas veces un mismo sistema discreto puede ser visto desde esas dos ópticas simultáneamente —en seguida daré un ejemplo—. Los modelos discretos mas

importantes son los siguientes: en primer lugar, el de *Fermi, Pasta y Ulam*:

$$\frac{d^2\phi_n}{dt^2} = F(\phi_{n+1} - \phi_n) - F(\phi_n - \phi_{n-1}), \quad (1.10)$$

dónde F puede ser $F = \gamma\phi + \alpha\phi^2$ o $F = \gamma\phi + \beta\phi^3$ (Fermi *et al.*, 1955). A título de curiosidad, me gustaría resaltar que en el límite continuo, cuando el espaciado del retículo, a , va a 0 y $na \rightarrow x$, este sistema se convierte en la ecuación de Boussinesq generalizada, con α o β nulos para la F cúbica o cuadrática respectivamente.

En segundo lugar, un contexto físico en el cual aparecen como regla general ecuaciones en diferencias es el de las líneas de transmisión eléctricas —ver por ejemplo Remoissenet (1989, 1990a, 1990b)—. El caso de la diseñada por Hirota y Suzuki (1973) es especialmente importante, puesto que su equivalente matemático es la llamada *red de Toda*:

$$\frac{d^2\phi_n}{dt^2} = \exp(\phi_{n+1} - \phi_n) - \exp(\phi_n - \phi_{n-1}), \quad (1.11)$$

la primera ecuación en diferencias resuelta mediante IST (Toda, 1967). El último modelo de esta pequeña lista es el de *Ablowitz-Ladik*:

$$i\frac{d\phi}{dt} = \phi_{n+1} - 2\phi_n + \phi_{n-1} \pm \phi_n^* \phi_n (\phi_{n+1} + \phi_{n-1}) \quad (1.12)$$

dónde el asterisco representa conjugación compleja — ϕ es aquí una función compleja—. Estas ecuaciones son interesantes *per se*, puesto que también constituyen un sistema integrable (Ablowitz y Ladik, 1975, 1976), pero además son también el ejemplo que anuncié del doble punto de vista, puesto que proporcionan una discretización en diferencias finitas de la ecuación NLS (1.5), de hecho una de las que presenta mejores propiedades (Herbst y Ablowitz, 1989b).

No es necesario decir que esta lista está lejos de ser exhaustiva; el que lo sea no es tampoco mi propósito. Entre las ecuaciones de las que no he hablado hay muchas otras importantes, como las de *Landau-Lifshitz* o *Maxwell-Bloch* —se pueden encontrar ampliamente descritas en el libro de Dodd *et al.* (1982)—. Además, me he restringido a sistemas unidimensionales, que son los que estudiaré en la tesis. Sin embargo, a pesar del hecho de que los sistemas unidimensionales tienen mucha importancia y aplicabilidad, pese a lo que pudiera parecer —es muy ilustrativo el trabajo de Mattis (1981), titulado “*How to reduce practically any problem to one dimension*”—, es

evidente que muchas veces hay que ir a modelos de dimensionalidad superior para dar cuenta de la física del problema. El conocimiento de estos modelos es hoy por hoy bastante pobre, aunque en los últimos años su estudio está experimentando un gran avance, sobre todo en dos dimensiones espaciales, donde se han obtenido muchos resultados para las ecuaciones de *Kadomtsev-Petviashvili* —un miembro también de la jerarquía KdV, pero en dos dimensiones, ver Kadomtsev y Petviashvili (1970) o Zakharov *et al.* (1984)— y de *Davey-Stewartson* —en cierto modo una generalización de la ecuación NLS, con un potencial que evoluciona en el tiempo, Davey y Stewartson (1974); Anker y Freeman, 1978—. A pesar de esos avances, el estudio del efecto del desorden en estas y otras ecuaciones en más de una dimensión es todavía terreno virgen, que es de esperar merezca gran atención en un futuro próximo.

1.3 Solitones

El aspecto de las ecuaciones cuyas expresiones se recogen en la sección anterior es realmente variado. No sólo eso, sino que además cada una ha entrado en la física por motivos muy diferentes de las demás, aunque no se pueden considerar realmente como entes completamente independientes sino que guardan cierta relación entre sí. ¿Por qué las he agrupado? ¿Cuál es su característica común, aparte de ser no lineales? La respuesta es sencilla: todas esas ecuaciones tienen en común el hecho de que permiten la propagación de *ondas solitarias* en el sistema que describen. He hablado ya varias veces de solitones, y ahora introduzco el concepto de onda solitaria. Conviene entonces entrar ya a definir lo que se entiende por ambas cosas. El concepto de onda solitaria fue usado por primera vez por Scott-Russell (1844) y su significado parece evidente. A pesar de ello, actualmente se aplica a infinidad de objetos y no hay una definición apropiada que los abarque a todos. Como ilustración, citaré la definición clásica de Scott *et al.* (1973). Ellos empezaban por definir *onda viajera* como “una solución de una ecuación de onda que depende de x y t sólo a través de una variable $\xi \equiv x - vt$, siendo v una constante fija”. Posteriormente, de entre las ondas viajeras seleccionaban las ondas solitarias, diciendo que eran “aquellas ondas viajeras cuya transición de un estado asintótico constante cuando $\xi \rightarrow -\infty$ a otro —tal vez distinto— cuando $\xi \rightarrow \infty$ está localizada esencialmente en un intervalo finito de la variable ξ ” —transición que suele implicar la localización de la energía y el momento del sistema en ese intervalo—. Pues bien, esta definición, no

excesivamente precisa, es aún demasiado restrictiva, pues deja fuera de la categoría de ondas solitarias objetos tan ubicuos —y solitónicos— como los llamados *breathers* de sG o los solitones de NLS. Ello me lleva a preferir una definición de trabajo todavía más laxa; en lo sucesivo, consideraré ondas solitarias a aquellas “que se propagan sin cambio de forma y tienen cierto perfil localizado” (Dodd *et al.*, 1982).

El concepto de solitón es ya más concreto, o debería serlo, y fue introducido por Zabusky y Kruskal (1965), como ya mencioné previamente. La característica que distingue a los solitones de las ondas solitarias es que son capaces de interaccionar y atravesarse unas otras sin sufrir más que un pequeño defasaje, recuperando por completo su forma y su energía tras el complicado proceso no lineal de colisión. Ello sólo sucede si el sistema en el que se propagan los solitones es *exactamente integrable* —un nuevo concepto todavía más carente de definición que los anteriores, como diré en seguida—, y para ondas de estos sistemas se ha reservado más o menos el uso de la palabra solitón. Sin embargo, no es en absoluto raro encontrarla refiriéndose a excitaciones de ecuaciones no integrables que están suficientemente localizadas, exhibiendo prácticamente las propiedades de una partícula rígida o puntual, o que tienen notables propiedades de estabilidad. En cierto sentido, tales ecuaciones no integrables estarían muy próximas a alguna otra que sí sería integrable.

He dejado pendiente el concepto de sistema integrable o exactamente integrable, que de ambas formas se suele denominar. Hasta hoy nadie ha propuesto una definición que alcance cierta aceptación general y, como consecuencia, los físicos hablan de algo que son incapaces de definir. Aún así, si se pregunta a alguien que trabaje en física no lineal las características de un sistema integrable, es casi seguro que citará las siguientes:

- Posee un número infinito de cantidades conservadas.
- Tiene soluciones que contienen N solitones para N entero y arbitrario.
- Tiene transformaciones Backlund que permiten construir nuevas soluciones a partir de otras ya conocidas.
- Sus solitones interaccionan de forma perfectamente elástica, o sea, sin perder energía, sufriendo sólo un defasaje; más aún, tras varias colisiones, este defasaje es simplemente la suma de los debidos a cada colisión individual.

- Se sabe resolver el problema de Cauchy general para el sistema en consideración.

Todas estas propiedades van siempre juntas y son lo más parecido a una definición de integrabilidad. Son muy peculiares: muy pocos sistemas son integrables. La raíz última de que unos sistemas sean integrables y otros no es algo que todavía no está bien comprendido, y para mí constituye una cuestión realmente intrigante. Por otra parte, casi todos los sistemas que he citado en la sección anterior lo son, como sG, NLS, KdV, mKdV, Boussinesq, Burgers; además, son los integrables los que tienen más aplicaciones —lo que equivale a los famosos huevo y gallina: ¿aparecen en más situaciones físicas por que de alguna forma su integrabilidad los privilegia, o se eligen para su estudio las situaciones físicas que dan lugar a estos sistemas porque son integrables y se sabe resolverlos?—. Este punto daría lugar a largas discusiones. Terminaré este comentario sobre integrabilidad diciendo que no es condición *sine qua non* el que un sistema sea integrable para que tenga soluciones localizadas, tipo solitón. Es el caso del sistema que más he estudiado en este trabajo, el sistema ϕ^4 , así como el double-sine-Gordon o el de Maxwell-Bloch, por citar algunos.

No todos los solitones de todos los sistemas son iguales o tienen exactamente las mismas propiedades. Empero, atendiendo a las más generales, se pueden clasificar en tres grandes tipos: *solitones dinámicos*, *solitones topológicos* y *solitones envolvente* —traducción libre de *envelope solitons*—. Esta clasificación no es ni mucho menos arbitraria ni inútil. Muy al contrario, en los últimos años se ha ido poniendo de manifiesto que estos tres tipos de solitones presentan distintas reacciones ante el desorden, cada una particular de un tipo pero más o menos idéntica para los solitones de una cierta clase. Es interesante profundizar un poco en este aspecto, en el que esta tesis también aporta su contribución —un análisis más detallado de este asunto se encuentra en Kivshar (1991b)—.

Aunque en principio todo solitón es más robusto frente a perturbaciones que una onda lineal, los solitones dinámicos son poco más que eso, por así decir. Muchas veces su comportamiento es casi lineal; así, son amortiguados hasta su total desaparición si se incluye en el modelo el efecto de la disipación. El arquetipo de solitón dinámico es el de KdV. Su expresión, la solución de la ecuación de KdV a un solitón es

$$\phi_{\kappa}(x, t) = -2\kappa^2 \cosh^{-2}[\kappa(x - 4\kappa^2 t - x_0)], \quad (1.13)$$

dónde $4\kappa^2 \equiv v$ es la velocidad del solitón y x_0 la posición de su centro en el instante inicial. Se ve de esta fórmula que estas ondas son en realidad

una familia uniparamétrica de soluciones, que dependen de un parámetro arbitrario $-\kappa$ — tal que, cuando se fija, todas las demás características del solitón quedan fijas. Una ecuación no integrable que posee soluciones tipo solitón dinámico es, por elegir una, la de Maxwell-Bloch (Dodd *et al.*, 1982).

Los solitones topológicos son también uniparamétricos, pero son algo más complicados. Pueden existir sólo en aquellos sistemas no lineales con dos o más estados fundamentales. No es preciso que sea exactamente un estado fundamental degenerado, basta que los niveles más bajos tengan una energía muy parecida. En estos modelos, los solitones, a los que se acostumbra a llamar *kinks*, conectan una parte del sistema en un estado fundamental con otra en otro estado fundamental. El representante típico de los *kinks* es el de sG. Por simple inspección, se puede ver que la ecuación de sG, Ec. (1.2), admite como soluciones las constantes $\phi \equiv 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Las soluciones tipo *kink* serán transiciones entre zonas del espacio en los que k tiene distintos valores, de la forma

$$\phi_v(x, t) = 4 \arctan \left[\exp \frac{\pm(x - vt)}{\sqrt{1 - v^2}} \right] \bmod 2\pi. \quad (1.14)$$

Si el signo de la exponencial es un $+$, se tiene un *kink*, que va de 0 cuando $x \rightarrow -\infty$ a 2π — todo módulo 2π — cuando $x \rightarrow \infty$, y en el caso contrario se encuentra lo que se acostumbra a llamar *antikink*. Los *kinks* y *antikinks* son una vez más capaces de atravesarse sin perder energía, y, como la ecuación sG es invariante Lorentz, han sido propuestos en el pasado como modelos de partículas extendidas relativistas —por Perring y Skyrme (1962), quienes ya se dieron cuenta de la naturaleza solitónica de los *kinks* mediante simulación numérica, al comprobar la elasticidad de sus colisiones—. Esa misma invariancia Lorentz lleva aparejada una limitación en el parámetro libre, la velocidad v , que ahora ha de ser $v \leq 1$. El carácter topológico, que se refiere a esa conexión entre estados distintos que hace el *kink* —y a una cantidad llamada carga topológica que introduciré posteriormente—, confiere a estos solitones una gran robustez, e impide, por ejemplo que la disipación los aniquile, siendo capaz sólo de detenerlos. Hay solitones topológicos en sistemas no integrables, como el objeto de este estudio, el del modelo ϕ^4 , y, en general, en todos los modelos NKG —con tal de que $V(\phi)$ tenga al menos dos mínimos— (Rice *et al.*, 1976).

Para terminar, dedicaré unas palabras a los solitones envolvente, cuya naturaleza es radicalmente diferente de los dos tipos anteriores. Son ondas solitarias biparamétricas, y su ejemplo más conocido es el soliton de la

ecuación NLS:

$$\phi_{\xi\rho}(x,t) = 2i\rho \frac{\exp[-2i\xi x - 2i(\xi^2 - \rho^2)t - \phi_0]}{\cosh[2\rho(x + 2\xi t - x_0)]}. \quad (1.15)$$

Aquí, -2ξ es la velocidad del solitón, 2ρ su amplitud —estos son los dos parámetros que fijan el solitón, en principio reales arbitrarios—, y x_0 y ϕ_0 su posición del centro y fase iniciales. Se puede ver de la Ec. (1.15) que el solitón propiamente dicho es la envolvente de un paquete de ondas —propiedad a la que debe su nombre—. Hay otro ejemplo muy importante de solitón envolvente, el *breather* de sG, sobre el que volveré luego. Las propiedades de este tipo de solitones son complejas, y su estudio es complicado por el nuevo parámetro libre que añade respecto a los tipos anteriores. Ello da lugar a una gran riqueza de comportamientos, que van de la aniquilación por fricción a la estabilidad y propagación sin distorsiones en medios desordenados, propiedad esta última que recojo en el capítulo 7 como uno de los resultados mas importantes de mi trabajo. Como antes, concluyo mi comentario sobre estos solitones indicando un ejemplo en sistemas no integrables, que es el ya mencionado de las excitaciones de pequeña amplitud en sistemas NKG (Newell, 1985; Remoissenet, 1986).

1.4 Modelos de desorden

Hasta aquí, he introducido un cierto número de modelos no lineales, y he hecho algunas observaciones sobre sus propiedades, aplicaciones y otras cosas relacionadas. Ha llegado ahora el momento de recordar la segunda pregunta que planteé más arriba: ¿Cómo se modela la influencia del desorden en esos sistemas? Para contestar a esta cuestión, no es necesario especificar si se habla de modelos lineales o no lineales. Como ya dije, el interés de los físicos en sistemas no lineales desordenados es muy reciente; por contra, el desorden se estudia en Física Lineal desde hace varias décadas, concretamente desde los trabajos pioneros de Landau y sobre todo de Lifshitz, en 1937 —es útil consultar la historia de los trabajos de Lifshitz que aparece en Gredeskul y Pastur (1985)—. Ha habido un gran desarrollo del tema, sobre todo en los terrenos de óptica y física de la materia condensada —son buenos *reviews* los de Barabanenkov *et al.* (1970) y Elliot *et al.* (1974) respectivamente; vale la pena echar un vistazo y profundizar en el libro de Chernov (1960)—. Probablemente, el descubrimiento más importante relativo a los sistemas lineales desordenados fue el que le valió el Nobel a Anderson: la localización

de las funciones de onda en un potencial desordenado (Anderson, 1958) — *reviews* en Thouless (1974) y Economou (1990)—. Desde entonces, se ha hecho y aprendido mucho en este campo —ver la amplia monografía de Lifshitz *et al.*, 1988—, muy al contrario de lo que sucede con los modelos no lineales.

En ambos casos, lineal y no lineal, para cada problema físico se pueden considerar varias formas de desorden. La referencia básica y realmente útil al hablar de modelos de desorden es el libro de Ziman (1979). Sus primeras líneas rezan: “ ‘Desorden’ no es mero caos; implica un orden defectuoso. Para pensar en un estado desordenado debemos tener en mente un ideal de orden del que está cerca”. En otras palabras, el efecto del desorden es siempre romper alguna simetría, prohibiendo el uso de muchas herramientas matemáticas poderosas que descansan en la hipótesis de orden perfecto. Ziman (1979) clasifica el desorden en tres tipos: *substitucional*, *celular* y *topológico*, que voy a describir brevemente. El desorden substitucional ocurre cuando el sistema del que uno se ocupa es un retículo perfecto, pero los componentes del sistema no son siempre iguales: por ejemplo, en un cristal formado por un sólo elemento en el que aparecen algunas impurezas en diversos lugares. Obviamente, esta forma de desorden puede ser más o menos compleja dependiendo del número de componentes disequivalentes que se introducen en el modelo, de su concentración, etcétera. El desorden substitucional más complicado es en realidad desorden celular, que no es otra cosa que un retículo o disposición regular de celdas que exhiben propiedades específicas de cada una de ellas. El mejor ejemplo de esto es el hielo (Ziman, 1979); en el hielo, la estructura del cristal es mantenida por enlaces de hidrógeno entre los átomos de oxígeno, y las moléculas en cada sitio son muy parecidas a las del agua en estado líquido, pero no son exactamente iguales a ésta, ni iguales entre sí. Los sistemas de este tipo pueden presentar *orden de corto alcance*, si los sitios vecinos tienen características parecidas pero esta similaridad o correlación decae en unos pocos espaciados de la red, o *orden de largo alcance* si no sucede así y grandes zonas del sistema tienen casi las mismas propiedades. Por último, cuando ni siquiera el concepto de red es aplicable, aparece el desorden topológico o desorden de dislocación.

Hecha esta clasificación, es preciso hacer tres observaciones. Primero, cada sistema físico pertenece a su propia subclase con sus peculiaridades. Así, se puede decir de un cierto compuesto que es una aleación desordenada substitucionalmente de un metal con un cierto porcentaje de otro distribuido uniformemente, por ejemplo. Segundo, el desorden puede ser estático y dinámico; por continuar con el ejemplo, el metal extraño puede estar fijo

o difundirse a través del huésped. Es fácil darse cuenta de que las propiedades de propagación de excitaciones, lineales o no, dependerán de forma crucial de que el desorden que encuentran en su camino sea fijo o cambie con el tiempo: las barreras pueden desaparecer, permitiendo la propagación, o aparecer, capturando las ondas; las fluctuaciones pueden originar radiación y actuar de freno o pueden causar inestabilidades, y así sucesivamente. Este nuevo ingrediente, el tiempo, puede originar desorden por sí sólo —lo que llamaré desorden dinámico, siguiendo a Hernández-García (1989) y Hernández-García *et al.* (1989a, 1989b)— en sistemas por demás perfectos. Una buena ilustración es la de las fluctuaciones térmicas de los átomos de un cristal en torno a sus posiciones de equilibrio, siempre inevitables a temperatura positiva, que pueden afectar —de hecho lo hacen— a las ondas que se propagan en el sistema.

La tercera y última observación puede parecer un simple juego de palabras, pero encierra un contenido importante: no es lo mismo estudiar desorden en un modelo que un modelo de un sistema desordenado.² La mejor forma de explicar esta afirmación es recurriendo al siguiente ejemplo: consideraré la ecuación KdV, Ec. (1.6), como ley de evolución de ondas largas dispersivas, y supondré que quiero calcular el efecto de ciertas inhomogeneidades en la propagación de los solitones. Tras este planteamiento, uno está tentado de plantear la siguiente ecuación como problema:

$$\phi_t + \phi\phi_x + \phi_{xxx} = f(x)\phi, \quad (1.16)$$

dónde $f(x)$ sería cierta función —determinista o aleatoria— que representaría el cambio de los parámetros del medio en función de la variable espacial. Sin embargo, esta representación ingenua no es lo que pretende ser, ni mucho menos, y la razón está a un nivel más profundo: para escribirla, la física no ha sido tomada en cuenta de manera apropiada. La ecuación KdV describe ondas largas *en un sistema de referencia móvil* de velocidad V , que debe fijarse para seleccionar las ondas que se propagan sólo en el sentido que nos interesa. Su forma primitiva es, en realidad,

$$\phi_t + [\phi - V]\phi_x + \phi_{xxx} = f(x)\phi; \quad (1.17)$$

si ahora hago el cambio de variable —que en ausencia de $f(x)$ conduce a la Ec. (1.6)— dado por $x \rightarrow x' + Vt'$, $t \rightarrow t'$, encuentro

$$\phi_{t'} + \phi\phi_{x'} + \phi_{x'x'x'} = f(x' + Vt')\phi, \quad (1.18)$$

²Agradezco a Yuri Kivshar conversaciones muy instructivas sobre este tema, así como el haberme sugerido el ejemplo que aparece a continuación.

evidentemente diferente de (1.16). En (1.18), el desorden espacial está ahora correctamente incluido. Esto no debe interpretarse en el sentido de que el estudio de (1.16) sea inútil, porque no pretendo en absoluto decir eso. La ecuación (1.16) es tan interesante como cualquier otra, y su estudio es igualmente digno de respeto. Lo que sí quiero destacar es que la Ec. (1.16) es un ejemplo simple de un problema de desorden en el modelo KdV, y tiene relevancia a la hora de estudiar estabilidad de solitones, entre otras cosas; por el contrario, la Ec. (1.18) es un ejemplo de un problema relativo a un sistema que, cuando no está perturbado, es modelado por la ecuación KdV, y por tanto constituye realmente un modelo físico de sistema desordenado.

Los párrafos anteriores llevan de forma natural a preguntarse por la forma de representar matemáticamente los distintos tipos de desorden. Parece lógico que cualquiera que sea esa representación, tiene que incorporar algún tipo de aleatoriedad, así que las más de las veces se recurre a variables aleatorias, en general a procesos estocásticos para modelar el desorden, cuya definición concreta dependerá del problema específico que se quiera tratar. Así, se puede considerar una red de impurezas de igual intensidad —es decir, de iguales potenciales— dispuestas al azar en el espacio, o una red perfecta de impurezas de diferentes tipos e intensidades, o ambas a la vez; se puede permitir que estas impurezas sean puntuales, y usar un conjunto de variables aleatorias, o que abarquen toda una zona del modelo y valernos entonces de un proceso estocástico definido en un intervalo; se puede considerar un campo que es el mismo a lo largo de todo el sistema pero fluctúa en el tiempo —también en instantes discretos o continuamente—; la correlación de las variables aleatorias puede ser de tipo delta o de largo alcance dependiendo del grado de orden del sistema, y así sucesivamente. La lista sería interminable, y bastan estos pocos ejemplos para mostrar el papel de las variables estocásticas para representar el desorden, muchas veces incontrolado y no cuantificable, que hay en una situación física.

No quisiera concluir esta sección sin mencionar otros modelos de desorden de los que no me voy a ocupar en la tesis, pero de gran importancia por su amplia utilización actual. El primero se refiere a una forma débil de desorden topológico, la de los *cuasicristales*, que son estructuras en las que no hay orden estrictamente hablando pero que se construyen siguiendo una regla determinista, como, por citar una, la de la secuencia de Fibonacci —ver, por ejemplo, Steinhardt y Ostlund 1987) o Janot *et al.* (1989)—. El otro modelo es el de los *fractales*, cuyo uso es hoy casi omnipresente. El concepto de fractal fue introducido por Mandelbrot (1975) y alcanzó madurez en su hoy famoso libro sobre geometría fractal (Mandelbrot, 1982). Los

fractales son sistemas u objetos muy complejos, que exhiben estructura a todas —o un amplio rango de— las escalas de observación, y, además, parecen ser ubicuos en la naturaleza (Mandelbrot, 1982). A lo largo de la pasada década, han ido entrando en la física de la materia condensada por multitud de motivos, y aunque los fractales deterministas no sean desordenados —como tampoco los cuasicristales— en sentido estricto, cada día se utilizan más como modelo de patrones muy complicados, que resultan de procesos de crecimiento (Vicsek, 1989) o de otros fenómenos —una monografía básica reciente de uno de los más destacados investigadores en el campo es Feder (1988); ver también los últimos *proceedings*, Aharony y Feder (1989)—. Redes cuasiperiódicas y fractales serán casi con seguridad el campo de estudio para los solitones en los años 90.

Modelos de Klein-Gordon no lineales

“Incluso las gentes que tendrían que saber, es decir los que saben manipular las ideas, triturarlas y presentarlas de manera que ellos mismos se creen que poseen un pensamiento original, nunca renuevan su patrimonio de cosas triturables, y entonces resulta que su sistema de expresión siempre lleva veinte años de delantera a la propia materia de la expresión.”

Boris Vian, *El Otoño en Pekin*.

2.1 Generalidades

El estudio de los modelos o de las ecuaciones de Klein-Gordon no lineales se puede comenzar desde distintos puntos de partida. El más usual es tal vez el de la teoría clásica de campos, esto es, derivarlas mediante el formalismo lagrangiano. Esto tiene la ventaja de que permite presentar las ecuaciones de forma muy directa en lo que respecta a sus propiedades matemáticas. Los modelos NKG vienen dados, en tal contexto, por el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2}(\phi_t^2 + \phi_x^2) - V(\phi) \right]. \quad (2.1)$$

El término potencial, $V(\phi)$, da lugar al correspondiente $V'(\phi)$ en la ecuación NKG, Ec. (1.1) y, variándolo, se van obteniendo todos los miembros de la familia. En el caso de las dos ecuaciones de las que voy a hablar en este trabajo, la del modelo ϕ^4 , Ec. (1.3), se obtiene poniendo $V(\phi) = [(1-\phi^2)/2]^2$, mientras que la de sG, Ec. (1.2), resulta de elegir $V(\phi) = 1 - \cos \phi$. Aquí he de decir que todas estas expresiones están adimensionalizadas, sin que por ello esté perdiendo generalidad, pues siempre es posible reescalar el campo ϕ y las variables x y t para eliminar todas las constantes que aparecen en la

ecuación "física", por así decir —el cambio de variable se puede encontrar por ejemplo en Eilenberger (1981) o Dodd *et al.*, (1982)—.

Es también bastante habitual encontrar los modelos ϕ^4 y sG definidos partiendo de sistemas discretos. En este caso, la costumbre, seguramente por razones de mayor claridad física, es partir de un Hamiltoniano de la forma

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_i}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} (\phi_i - \phi_{i+1})^2 + V(\phi_i) \right], \quad (2.2)$$

siendo $\phi_i \equiv \phi_i(t)$, $i = 1, \dots, N$. De este Hamiltoniano se derivan inmediatamente las correspondientes $2N$ ecuaciones de Hamilton,

$$\frac{d^2\phi_n}{dt^2} - [\phi_{n+1} - 2\phi_n + \phi_{n-1}] + \frac{dV(\phi_n)}{d\phi_n} = 0, \quad (2.3)$$

cuyo límite continuo, que, recuerdo, es $ia \rightarrow x$, dónde a es el espaciado de la red, no es otra cosa que la ecuación (1.1).

Una vez que he explicado como derivar rápidamente las ecuaciones NKG y sus propiedades, voy a centrarme ya en las dos ecuaciones que son objeto de estudio aquí, ϕ^4 y sG. La primera no es integrable y la segunda sí. Tan sencilla frase marca una enorme y profunda diferencia entre ambas, puesto que la ecuación sG tiene todas las características que mencioné antes al hablar de sistemas integrables, mientras que la ecuación ϕ^4 no tiene ninguna. De esas características, las más llamativas y que tienen consecuencias físicas más importantes son dos. La primera es que los solitones —que al ser topológicos en ambos modelos los hacen hasta cierto punto parecidos— de ϕ^4 , cuya expresión es

$$\phi(x, t) = \pm \tanh \left[\frac{\gamma}{\sqrt{2}} (x - vt - x_0) \right], \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad (2.4)$$

no lo son estrictamente, por contraste con los de sG. Más aún, no hay soluciones de ϕ^4 con un número arbitrario de solitones—que en sG sí existen—, sino que, debido a que el potencial correspondiente sólo tiene dos mínimos, 1 y -1, sólo son posibles secuencias en las que *kinks* —que van de -1 a 1, signo + en la Ec. (2.4)— y *antikinks* —de 1 a -1, signo - en la Ec. (2.4)— se van alternando. De hecho, las propiedades de los *kinks* de ϕ^4 , la mayoría de las cuáles se han descubierto numéricamente —ver Schneider y Stoll (1978), y referencias; ver también Ablowitz *et al.* (1979), Campbell *et al.* (1983), Combs y Yip (1983, 1984), Kunz y Combs (1985), Campbell y Peyrard (1986), Campbell *et al.* (1991)— por la falta de artillería analítica

potente para esta ecuación, son muy curiosas. La más sorprendente es que cuando un *kink* y un *antikink* chocan se aniquilan mutuamente si la velocidad relativa de ambos es menor que cierto valor; de lo contrario, rebotan y se separan de nuevo. Sin embargo, en el intervalo de aniquilación hay lo que se llaman *ventanas de resonancia* (Campbell *et al.*, 1983; Campbell y Peyrard, 1986; Campbell *et al.*, 1991) en las que se aprecia la separación de los *kinks* tras rebotar un cierto número de veces, que depende de la ventana en consideración. Esta resonancia es debida a la existencia de un modo interno de vibración que luego describiré —en el capítulo 4 hablo detalle de los modos de excitación de los *kinks*—, que no existe en el sistema sG y que ha sido relacionado (Bogdan *et al.*, 1990) con las causas de la no integrabilidad de los sistemas no lineales. Este modo, localizado en torno al *kink*, actúa como depósito temporal de energía, primero recibiendo parte de la cinética de ambos *kinks* para restituírsela a continuación (Campbell *et al.*, 1983).

La otra propiedad fundamental en la que difieren los modelos sG y ϕ^4 es en el número de cantidades conservadas. En sG, como sistema integrable que es, existen infinitas cantidades conservadas no equivalentes, mientras que la ecuación ϕ^4 da lugar a una evolución que conserva sólo tres cantidades de todas las que tiene sG, y no se conoce ninguna otra. Estas tres cantidades son la energía total,

$$E = \int dx \left[\frac{1}{2}(\phi_t^2 + \phi_x^2) + V(\phi) \right], \quad (2.5)$$

—dónde se debe tomar el potencial $V(\phi)$ que corresponda—, el momento total,

$$P = - \int dx \phi_t \phi_x, \quad (2.6)$$

y la llamada carga topológica, cuya expresión es

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_x = \frac{1}{2\pi} [\phi(\infty, t) - \phi(-\infty, t)] = N, \quad (2.7)$$

siendo N el número total de solitones que hay en el sistema, teniendo en cuenta que los *kinks* contribuyen con $+1$ y los *antikinks* con -1 , por lo que en sG N es cualquier entero, y en ϕ^4 $N = +1, 0, -1$. Esta última cantidad es la razón esencial de la estabilidad —y del nombre— de los solitones topológicos: la obligación de que se conserve prohíbe que los solitones decaigan disipativamente a radiación. En cuanto a energía y momento, veré más adelante —capítulo 3— que nos proporcionarán una forma muy sencilla de

obtener una estimación de los efectos de pequeñas perturbaciones sobre los solitones.

Concluiré este resumen de las principales propiedades de estos dos modelos presentando la expresión explícita de la solución tipo *breather* de sG, a la que me referí al hablar de solitones envolvente y que no es otra que

$$\phi_{br}(x, t) \equiv 4 \arctan^{-1} \left[\tan \mu \frac{\sin[\gamma(t - vx) + x_0] \cos \mu}{\cosh\{\gamma[x - v(t - t_0)] \sin \mu\}} \right], \quad (2.8)$$

y que exhibe las mismas características solitónicas que los *kinks*, es decir, interaccionan elásticamente con ellos, además de hacerlo así unos *breathers* con otros. Su nombre viene del verbo inglés *to breath*, que significa respirar, y es muy gráfico para describir la evolución de estas soluciones —hay muy buenos dibujos en McLaughlin y Scott (1978)—, que son estados oscilatorios de frecuencia $\cos \mu$ y con carga topológica nula. Se pueden ver también como estados ligados de un *kink* y un *antikink*. Con ellos —y la radiación— queda completa la familia de posibles soluciones de sG necesaria para expresar la solución del problema de Cauchy. Por lo que respecta a ϕ^4 , se especuló durante largo tiempo con la existencia de soluciones estables tipo *breather*, hasta que Segur y Kruskal (1987) probaron recientemente que no es así. Sin embargo, sí existen soluciones de este tipo si se relaja la condición de estabilidad. En ese caso, se puede ver que los *breathers* de ϕ^4 son débilmente inestables y decaen lentamente dando lugar a radiación —ver Boyd (1990); este trabajo incluye numerosas referencias y un informe reciente sobre el estado de la cuestión—.

2.2 Aplicaciones

Los modelos de Klein-Gordon no lineales han encontrado numerosas aplicaciones en física, en muy diversos campos que van de las Altas Energías a la Materia Condensada. En esta breve sección voy a intentar resumir las más importantes, renunciando de antemano a compilar una lista exhaustiva, puesto que el número de publicaciones sobre estos modelos es realmente impresionante.

Como esta tesis está dedicada en su mayor parte al modelo ϕ^4 —como teoría clásica, por oposición a cuántica— empezaré hablando de él, aunque su aplicación sea más restringida que la de sG —de lo cual es en parte culpable su no integrabilidad—. Hasta dónde yo sé, esta ecuación apareció en primer lugar como un prototipo de teoría para un campo escalar —Dashen *et al.* (1974); ver también Rajaraman (1975, 1980), y Moshir (1981)—,

sobre la que aún se discute hoy en día, si bien está prácticamente probada su trivialidad como teoría cuántica de campos. No mucho más tarde, pero con más éxito, el modelo ϕ^4 entró en la Física de Materia Condensada, cuándo fue propuesto de independientemente por Aubry (1975, 1976) y Krumhansl y Schrieffer (1975) para describir las transiciones de fase estructurales que tienen lugar en compuestos con estructuras tipo perovskita y similares, extendiéndose luego su aplicación a materiales ferromagnéticos y ferroeléctricos —Bishop *et al.* (1977), Collins *et al.* (1979), Currie *et al.* (1979), Imada (1981); estos dos últimos trabajos contienen comparaciones con sistemas reales, con bastante buen acuerdo—. Por esa misma época, la ecuación ϕ^4 aparece como un modelo fenomenológico para las cadenas poliméricas, en las que está relacionado con los desajustes en los dobles enlaces de los átomos de carbono (Rice, 1979; Rice y Timonen, 1979; Rice y Mele, 1980). Estos cálculos fueron luego formalizados a partir de la interpretación de ϕ^4 como teoría de campos (Jackiw y Schrieffer, 1981) y utilizados para describir *polarones* —objetos con número fermiónico $1/2$ — en sistemas que sufren transiciones tipo Peierls o conductor-aislante —hablaré de esto con más detalle en el capítulo siguiente; para profundizar, ver por ejemplo Tomombs (1978) sobre estos compuestos; ver en los *reviews* de Roth y Bleier (1987) y Heeger *et al.* (1988) los resultados más recientes—. Por último, la aplicación más reciente del modelo ϕ^4 —y evoluciones posteriores de él— está relacionada con la dinámica de compuestos cuya estructura está basada en enlaces de hidrógeno —hay ejemplos de complejidades que van del hielo al ADN—. Fue sugerida también de forma independiente por Gordon (1987) y Pnevmatikos (1987), y con posterioridad se ha obtenido mucha información explotando estas ideas originales, como en Gordon (1989), dónde se utiliza el modelo ϕ^4 con parámetros realistas para estudiar la conductividad del hielo.

La ecuación de sG fue también, ya antes de la de ϕ^4 , una teoría de partículas, como ya he mencionado (Perring y Skyrme, 1962). Empero, en su caso su utilización en materia condensada databa de bastante tiempo atrás, cuando Frenkel y Kontorowa (1939) la propusieron para estudiar dislocaciones, a lo que igualmente me he referido antes. Pero no son estos los temas en los que más éxito ha obtenido el modelo de sG, sino en la teoría de la electrodinámica de uniones Josephson. En este campo, la ecuación sG gobierna la evolución de la diferencia de fase entre los dos superconductores que constituyen la unión. El estudio de los solitones —que cuando se aplican a uniones Josephson se suelen llamar *fluxones*— fue comenzado por Kulik (1967), Lebwohl y Stephen (1967) y Scott (1967), y dio lugar a una

enorme cantidad de trabajo —la referencia básica es la extensa monografía de Barone y Paternó (1982)— que todavía no parece haber agotado sus posibilidades. Otros terrenos en los que la ecuación de sG ha resultado muy útil es en la dinámica de paredes de dominio en compuestos ferromagnéticos cuasi-unidimensionales (Enz, 1964; Mikeska, 1978; Kjems y Steiner, 1978) o ferroeléctricos (Pouget y Maugin, 1984a, 1984b, 1985a, 1985b); ondas electromagnéticas en *superredes* de semiconductores (Bass y Tetertov, 1985); ondas de densidad de carga (Lee *et al.*, 1974; Rice *et al.*, 1976; Grüner y Zetl, 1985); ondas en helio líquido (Maki, 1978; Kitchenside *et al.*, 1978), etcétera —hay todavía más aplicaciones, ver por ejemplo Dodd *et al.* (1982), o Kivshar y Malomed (1989)—. Sin ser completa, esta lista ilustra las posibilidades que tiene este modelo en muchos contextos.

2.3 Modelos ϕ^4 y sG desordenados

Como último apartado de esta introducción, es necesario recoger, aunque sea de forma sumaria, el marco natural en el que debe verse esta tesis, es decir, qué tipo de trabajos se han hecho hasta la fecha tocantes al desorden en los modelos que trato, y qué resultados se han obtenido. Al igual que en los sistemas sin perturbar, es mucho más lo que se conoce sobre sG que sobre ϕ^4 cuando ambos están perturbados; de hecho, uno de las aportaciones de la tesis es estudiar en el modelo ϕ^4 términos de desorden cuyos efectos ya se habían descrito o se estaban describiendo en sG. Intentaré en los párrafos que siguen presentar un resumen bastante detallado de lo ya conocido para ϕ^4 cuando comencé este trabajo, así como de algunos resultados que se han ido obteniendo a la vez que los que presento aquí. Por otro lado, creo que, por completitud, es necesario incluir una reseña similar, aunque considerablemente más breve, de los modelos sG desordenados que se han investigado hasta la fecha. Para ampliar esta información, se pueden consultar los *reviews* de Bass *et al.* (1988), Kivshar y Malomed (1989) —este es tal vez el que contiene la mayor cantidad de resultados—, o el más reciente de Gredeskul y Kivshar (1991).

2.3.1 Modelo ϕ^4

La investigación de los efectos del desorden en el modelo ϕ^4 viene enormemente condicionada por el hecho de que no es integrable, lo cual restringe de manera drástica las posibilidades de ataque analítico de los problemas. Ello hace que esta investigación se enfoque desde un punto de vista particular y

muy diferente de la llevada a cabo en el modelo sG. De hecho, los primeros artículos que van más allá de la ecuación sin perturbar, Ec. (1.3) están dedicados al problema de la interacción que tiene lugar entre *kinks* y *fonones* — se suele llamar fonones a las excitaciones de pequeña amplitud del sistema, que son prácticamente lineales y por el contexto físico se identifican con estados de vibración de la red cristalina; en realidad, es un sinónimo de radiación—. Este problema es mucho más sencillo en la ecuación sG: radiación y *kinks* son transparentes unos a otros. Esta fue la cuestión que enfrentaron Theodorakopoulos (1979) y Wada y Schrieffer (1979) para ϕ^4 , probando mediante cálculos perturbativos directos que la interacción *kink*-fonón induce un defasaje en el *kink*. Luego, calcularon a través de procedimientos distintos la constante de difusión que rige el movimiento browniano del *kink*, debido a la colisión con los fonones térmicos presentes en la red a temperaturas no nulas. Los siguientes esfuerzos en esta dirección se deben a Collins *et al.* (1979) y Currie *et al.* (1979), que estudiaron la ecuación general

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} - \phi + \phi^3 = -\alpha\phi_t + F(x, t) + f(x, t), \quad (2.9)$$

dónde, como es usual, el término en la derivada primera ϕ_t es una disipación introducida fenomenológicamente, F es una fuerza externa y f es un proceso aleatorio con correlaciones espacio temporales tipo delta. Esta es, si no me equivoco, la primera vez que se estudió la ecuación ϕ^4 con una perturbación estocástica, que intentaba representar el efecto de los fonones sobre el *kink* —muy análogamente a como la aleatoriedad representa el efecto de las moléculas del agua sobre la partícula browniana en la ecuación de Langevin—. Collins *et al.* (1979) y Currie *et al.* (1979) mostraron que los *kinks* eran estables si el ruido no era muy grande, recalcularon la constante de difusión, la velocidad límite que alcanzaban los *kinks* bajo la acción simultánea de las fuerzas y la disipación, y el factor de estructura del sistema. La comparación que hicieron con resultados experimentales de difracción de neutrones en materiales ferroeléctricos resultó ser muy satisfactoria. Olvidando por un momento el orden cronológico, diré que la ecuación (2.9) ha sido estudiada hace poco por Ji-Zhong Xu (1990), obteniendo buen acuerdo con parámetros de cadenas con enlaces de hidrógeno entre sus resultados y la conductividad medida experimentalmente.

Tuvieron que pasar algunos años hasta que a mediados de los ochenta se hicieron progresos significativos. Bass *et al.* (1984, 1986) estudiaban a la vez la ecuación de sG y la de ϕ^4 , y su principal hallazgo fue aplicar lo que se ha dado en llamar la *aproximación adiabática* (McLaughlin y Scott, 1978) al caso de perturbaciones estocásticas de ϕ^4 —antes ya lo habían hecho en sG

Pascual y Vázquez (1985)—. Volveré sobre ello en detalle en los capítulos siguientes. Ahora diré tan sólo que la idea es reducir el problema de infinitos grados de libertad a dos, considerando el *kink* como una partícula rígida, cuyos parámetros, posición y velocidad, son afectados por una perturbación renormalizada. De esta forma, me quedo tan sólo con ecuaciones diferenciales ordinarias, posiblemente acopladas, para estas dos coordenadas. Bass *et al.* (1984, 1986) calcularon estas ecuaciones para ϕ^4 —y sG, en Bass *et al.* (1984, 1985, 1986) y Kivshar *et al.* (1986)— y derivaron la ecuación de Fokker-Planck asociada para la densidad de probabilidad de dichas coordenadas, posición y velocidad. Finalmente, resolvieron dicha ecuación en la aproximación WKB; con la densidad de probabilidad así obtenida estaban ya en condiciones de calcular valores medios de interés, como el de la posición del *kink*, por ejemplo. Sus resultados aplicables en principio para procesos de Markov generales, contienen expresiones explícitas en los límites de correlaciones espaciales del ruido de muy corto y de muy largo alcance. Por otra parte, no hacen ninguna afirmación sobre el rango de validez de sus resultados, en el sentido de que no dan un valor de la intensidad del ruido tal que se pueda considerar pequeño y para el que el *kink* tenga el comportamiento predicho. Esta cuestión está en la raíz de la parte II de este trabajo, así como también en la del paralelo de Rodríguez-Plaza (1988; Rodríguez-Plaza y Vázquez, 1990). En este último artículo se considera de nuevo la ecuación (2.9) en ausencia de fuerza externa, además de la situación en que el ruido blanco se acopla linealmente al campo ϕ , dos de los casos que estudiaron Bass *et al.* (1986). Ahora el progreso es en dos direcciones: por un lado se resuelve exactamente la ecuación de Fokker-Planck en el caso aditivo, y por otro todos los resultados perturbativos se comparan con simulaciones numéricas, estableciendo así el régimen de validez de las aproximaciones analíticas. Quedaron como cuestiones abiertas la estimación de la radiación producida y la extensión al acoplo no lineal, y son las que se abordan en la parte II de esta tesis, capítulos 3 y 4. Por lo que respecta al ruido dependiente del espacio, aparte de los pocos resultados aproximados de Bass *et al.* (1984) en el límite de pequeñas correlaciones, constituía un campo completamente abierto que también he tocado aquí — capítulo 5—.

Cerraré este apartado hablando de algunas otras investigaciones colaterales sobre el modelo ϕ^4 , que son complementarias a ésta que presento. Beloshapkin *et al.* (1989) llevaron a cabo simulaciones numéricas sobre el modelo ϕ^4 discreto buscando configuraciones regulares de solitones, pero encontraron que estas estructuras eran siempre inestables bajo fluctuaciones, al contrario de lo que sucede en el modelo de Frenkel-Kontorowa (sG

discreto). Esto ocurre porque la temperatura hace fluctuar la profundidad de los dobles pozos del potencial —efecto que simula la perturbación que propongo en los capítulos 2 y 3—, acarreando la disminución del umbral de proximidad *kink-antikink* para su aniquilación. Fraggis y Pnenvatikos (1989) y Fraggis *et al.* (1989) estudiaron las consecuencias de la presencia de una impureza aislada en el modelo ϕ^4 discreto, caracterizada por una masa distinta de la de las demás partículas. Siguiendo el procedimiento habitual —y más adecuado a mi juicio—, hicieron cálculos analíticos sobre el modo de vibración de dicha impureza, que está localizado en un entorno de unos pocos espaciados de la red en torno a ella, y los relacionaron con los resultados de sus simulaciones numéricas sobre la excitación de ese modo por un *kink* incidente sobre la impureza. Descubrieron que la velocidad del *kink* sólo afectaba a la amplitud de vibración inducida del modo de impureza, y que los *kinks* eran reflejados si la masa diferente era mayor que una cierta masa crítica, que crece con la velocidad del *kink* incidente —más rápido es el *kink*, mayor es la masa necesaria para que se refleje—. Bogdan *et al.* (1990) se dedicaron al estudio de los modos localizados en una serie de modelos que incluían a ϕ^4 . Calcularon analítica y numéricamente el espectro de estas excitaciones y fueron capaces, con esos espectros, de dar cuenta del mecanismo por el cual las fuerzas externas excitan los modos localizados. Por último, y muy recientemente, Kivshar, Zhang y Vázquez (1991) han analizado en más detalle las colisiones *kink-impureza*, encontrando ventanas de resonancia muy parecidas a las de Campbell *et al.* (1983) en las colisiones *kink-antikink* y explican sus resultados a través de la interacción del *kink* con el modo de impureza, que aquí juega el papel que en el caso *kink-antikink* jugaba el modo interno de ambos.

2.3.2 Modelo sine-Gordon

El amplio conocimiento que se ha ido acumulando desde 1976 sobre el tema desorden en modelos sG me obliga no sólo a intentar ser escueto, sino a recoger en este apartado las contribuciones más destacadas, omitiendo otras cuya importancia no es poca. Digo “desde 1976” porque es en este año en el que aparece el trabajo que constituye el auténtico germen de la investigación en modelos NKG desordenados: una *letter* de Fogel *et al.* (1976), a la que luego siguieron dos artículos detallados y con muchas de las ideas que aún ahora son básicas (Fogel *et al.*, 1977; Currie *et al.*, 1977). Ellos propusieron el procedimiento perturbativo directo —linealizar en torno al solitón— que describo con todo detalle en el capítulo 4, dónde presento una versión mejo-

rada para evitar términos seculares, adecuada al modelo ϕ^4 estocástico. A continuación, particularizaron para algunos ejemplos concretos, como

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \sin \phi = \lambda[\delta(x - x_0) - \delta(x + x_0)], \quad (2.10)$$

donde se ha escogido un potencial $\lambda\phi_x[\theta(x - x_0) - \theta(x + x_0)]$ para modelar impurezas en el sistema —volveré sobre esta perturbación en el capítulo 6 al hablar de interferencias—, y también

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + [1 + \epsilon(x)] \sin \phi = 0. \quad (2.11)$$

siendo $\epsilon(x) = \alpha\theta(x_0)$, $\alpha \ll 1$. Para la ecuación (2.10) probaron que el solitón era acelerado —si $\lambda < 0$; decelerado, si $\lambda > 0$ — mientras estaba entre las dos deltas, pero tras su paso el único cambio permanente era un defasaje debido a esa aceleración, puesto que recuperaba su velocidad inicial. Mas aún, cuando $\lambda > 0$ el solitón puede ser atrapado por la impureza, que con ese signo es atractiva, si la velocidad con que incide sobre ella es suficientemente pequeña, menor que

$$v_{thr}^2 = 1 - \left(1 + \frac{1}{2}|\alpha| \tanh^{-1} \sinh x_0\right)^{-2}; \quad (2.12)$$

una vez capturado, el solitón ejecuta un movimiento oscilatorio en torno al punto de captura. Para la otra perturbación, Ec. (2.11), descubrieron que el efecto de la modulación espacial de la frecuencia fundamental del sistema era que el *kink* se veía obligado a reajustar su anchura y su velocidad para propagarse tras cruzar la frontera entre las dos zonas. Una vez más, comprobaron estas predicciones con simulaciones numéricas (Currie *et al.*, 1977) y encontraron muy buen acuerdo. En esas simulaciones descubrieron un efecto de la discretización, bautizado como *pinning* —las traducciones más aproximadas sería “inmovilización”, o “fijado”, pero ninguna de ellas me gusta— que tiene lugar cuando el mallado espacial es muy ancho, de tal forma que el *kink* abarca sólo cuatro o cinco puntos de la malla. En esas circunstancias los solitones perdían energía radiativamente debido a que para pasar de un punto de la malla a otra tienen que atravesar una barrera de potencial —la barrera de Peierls-Nabarro— que no existe en el modelo continuo —a este respecto, es interesante consultar los trabajos de Bishop y Lewis (1979), sobre *pinning* de paredes de dominio magnético estrechas; Peyrard y Kruskal (1984), sobre simulación de sistemas de sG altamente discretos; Willis *et al.* (1986), Stancioff *et al.* (1986), Boesch y Willis (1989) y Boesch *et al.* (1989) sobre tratamiento analítico por coordenadas

colectivas de este problema, recientemente extendido por Braun y Kivshar (1990, 1991); por último, resaltaré que esto no es un efecto particular de sG sino general para todo modelo NKG, ver Combs y Yip (1983, 1984) sobre esta misma cuestión en ϕ^4 —.

Más que los resultados concretos, lo transcendental del trabajo que acabo de resumir es que sugirió y mostró con abundancia de ejemplos que los solitones de sG se podían considerar en buena aproximación como partículas sometidas a las leyes de Newton, despreciando efectos radiativos y tratando el problema como uno mecánico sencillo. Ya he dicho con anterioridad que este tipo de aproximación —adiabática o de coordenadas colectivas— es sorprendentemente buena. Su presentación de forma más rigurosa no tardó en aparecer, en el artículo clásico de McLaughlin y Scott (1978), sobre la ecuación para una unión Josephson realista,

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \sin \phi = -\alpha \phi_t + \beta \phi_{xxt} - \gamma - \sum_i \mu_i \delta(x - a_i) \sin \phi, \quad (2.13)$$

dónde además del término disipativo acostumbrado, figuran uno en ϕ_{xxt} que da cuenta de la disipación debida al *tunneling* de electrones normales a través de la barrera aislante; otro en γ que no es otra cosa que una corriente que proporciona energía a los fluxones, y otro como un sumatorio de deltas que representa regiones con alta corriente crítica local o *microshorts*, —si tuvieran el signo contrario serían de baja corriente crítica o *microrresistores*, ver Kivshar y Malomed (1988b) y Kivshar, Malomed y Nepomnyaschiĭ (1988)—. McLaughlin y Scott estudiaron lo que sucede cuando hay sólo una de estas impurezas, escribiendo las ecuaciones diferenciales ordinarias para su posición y velocidad e integrándolas numéricamente, estimando la corriente máxima bajo la cual el *microshort* es capaz de capturar fluxones. Posteriormente calcularon la radiación emitida por los fluxones capturados y probaron que por ser de menor frecuencia que el espectro de radiación no se podía acoplar a ésta —en realidad, siendo más fino al tener en cuenta no linealidades se ve que sí se acopla, aunque débilmente (Malomed, 1987a, 1987c; Kivshar y Malomed, 1988a)—.

Desde 1978 han aparecido muchos más artículos que tratan de impurezas puntuales, incluyendo efectos radiativos, pero no me voy a detener en ellos; prefiero referirme a la exhaustiva recopilación de Kivshar y Malomed (1989). Pasaré entonces a hablar de redes de impurezas, es decir, la ecuación (2.13) con el sumatorio de las deltas completo, y otras relacionadas. El primer trabajo sobre este punto es de Kivshar y Malomed (1985), que intentaron calcular la radiación emitida por los fluxones cuando la red de impurezas es

de regular y sus intensidades son iguales, obteniendo expresiones aproximadas en algunos casos límite: en la red diluida, probaron que la energía se emite esencialmente hacia adelante y estimaron su valor, mientras que en la red muy densa, vieron que (2.13) es equivalente a

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \sin \phi = \epsilon \sin(\kappa x) \sin(\phi), \quad (2.14)$$

con lo que los cálculos que sobre esta última habían hecho Mkrtchyan y Shmidt (1979) se aplicaban directamente —hace poco, Malomed (1990a) y Malomed y Tribelsky (1990) han vuelto sobre este tema en el contexto de ondas de densidad de carga, ampliando lo ya conocido—. Malomed (1987a, 1987b) continuó la investigación de la ecuación genérica (2.13) y probó numerosos resultados concernientes a la radiación, cuando además se incluían otras perturbaciones. También Malomed (1990b) calculó la conductividad por solitones en un tal sistema cuando se aplica una corriente externa que libera los *kinks* atrapados por las impurezas, trabajo generalizado luego por Malomed y Nepomnyaschiĭ (1991). Iliyikh y Shapiro (1990) y Kivshar y Chubykalo (1991) afrontaron el problema en sistemas magnéticos; estos últimos probaron que había efectos visibles experimentalmente, que dependían de la polaridad de los *kinks*. Bountis y Pnevmatikos (1990) y Bountis *et al.* (1990) comprobaron que la aproximación de coordenadas colectivas seguía siendo aplicable y dando buenos resultados en el caso de dos impurezas, comparando las simulaciones de las ecuaciones ordinarias correspondientes con las de la ecuación completa. Otros resultados recientes sobre esta cuestión se recogen en los capítulos 6 y 7. En dinámica de grupos de solitones, se ha descubierto en los últimos años la existencia de los llamados *supersolitones* (Ustinov, 1989) y se han dedicado a ello numerosos trabajos desde los puntos de vista teórico, numérico y experimental (Oboznov y Ustinov, 1989; Malomed, 1990c; Malomed *et al.*, 1990; Malomed y Ustinov, 1990a, 1990b, 1990c; Kivshar y Soboleva, 1990a, 1990b) pero no voy a entrar aquí en su descripción.

Obviamente, no puedo terminar sin dedicar el espacio debido a los problemas estocásticos en sG. Ya cité al hablar de ϕ^4 los esfuerzos dedicados a ellos por Bass *et al.*, pero antes que ellos ya Mineev *et al.* (1981) estudiaron, de entre la familia de ecuaciones

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \sin \phi = \epsilon f(x, t) R[\phi], \quad (2.15)$$

el caso con $f(x, t) \equiv f(x)$, siendo $f(x)$ un ruido blanco gaussiano, y $R[\phi] \equiv \sin \phi$, y probaron que la radiación emitida por un *kink* propagándose en

este sistema iba a cero cuando la velocidad iba a cero o a la máxima, 1, además de predecir efectos de histéresis en las curvas intensidad-voltaje de la unión. Bass y Sinitzyn (1982) retomaron este asunto en tres dimensiones —caso muy excepcional, verdaderamente pionero— aunque sus cálculos son válidos sólo en ciertos límites de la correlación transversal. También se trata la ecuación de Mineev *et al.* (1981) en Pascual *et al.* (1989), que por primera vez contiene simulaciones numéricas; además, incluye un estudio aproximado de las ecuaciones adiabáticas a cortos tiempos que las explica, en particular la respuesta asimétrica de los solitones al ruido.

Como se ve, es aún poco lo que se conoce sobre perturbaciones estocásticas dependientes del espacio. La situación es más optimista si hablo de fluctuaciones, es decir, perturbaciones estocásticas dependientes del tiempo, que son más accesibles a técnicas analíticas. Salerno *et al.* (1984) consideraron ruido aditivo puro —o sea, $f(x, t) \equiv f(t)$ y $R[\phi] \equiv 1$ en (2.15)—, que simula el acoplo con un depósito de calor o baño térmico, y vieron que *kinks* y fonones se termalizaban, los primeros con una energía promedio de $k_B T/2$ por modo y los segundos con $k_B T$, calculando también la constante de difusión de los *kinks*. Marchesoni y Vázquez (1985) hicieron simulaciones numéricas del mismo problema y del multiplicativo $R[\phi] \equiv \sin \phi$ con ruido fuerte. Pascual y Vázquez (1985) se ocuparon en detalle del ruido débil, cuyo umbral establecieron por comparación con la aproximación adiabática, para el ruido aditivo y el acoplado linealmente, $R[\phi] \equiv \phi$. Sus resultados fueron confirmados con posterioridad por simulaciones masivas (Biller y Petruccione, 1990; Petruccione y Biller, 1990). Otros artículos interesantes son el de Kaup y Osman (1986), que desarrollaron una teoría de perturbaciones singulares para el ruido aditivo y demostraron que el límite de disipación infinita del sistema sG no era el llamado sistema sG sobrearmortiguado —ver Kaup (1983)—; el de Krug y Spohn (1989), que encontraron difusión anómala para el sistema forzado, con dispersión creciente como $t^{2/3}$; y, por último, los de Willis (1989) y Marchesoni y Willis (1990), que describen dos regímenes distintos —anómalo y viscoso— de difusión en función de la posibilidad de desprestigiar la interacción entre fonones y solitones o no, coincidente con los desarrollos generales para modelos NKG de Ivanov y Kolezhuk (1990), que contiene muchas referencias útiles.

2.4 Plan y estructura de la tesis

Concluyo esta primera parte, introductoria, con la presentación de lo que es el cuerpo de la tesis. Los resultados que incluye este cuerpo principal están orientados esencialmente en dos direcciones: completar la investigación ya iniciada por Rodríguez-Plaza y Vázquez sobre perturbaciones estocásticas en el modelo ϕ^4 , tanto en lo analítico como en lo numérico, y profundizar en el conocimiento de los sistemas con impurezas puntuales estudiando efectos de interferencia, localización y transmisión de solitones. Es por ello que he dividido esta tesis en dos partes además de esta introducción: Parte II, dedicada al “Desorden continuo”, es decir, perturbaciones descritas por procesos estocásticos, y parte III, dedicada a “Desorden puntual”, dado por dos o más impurezas. No debe entenderse por ello que estas dos partes sean disjuntas; muy al contrario, están interrelacionadas desde diversos puntos de vista. Así, por ejemplo, el procedimiento de simulación numérica —y el núcleo de los programas— será el mismo en todos los casos, con lo que las sucesivas comprobaciones y tests a los que irá siendo sometido servirán para dar fiabilidad a todos los resultados. Análogamente, lo averiguado sobre rangos de validez de teorías perturbativas o incluso sobre su aplicabilidad da pistas para atacar otros problemas o interpretar sus resultados.

La Parte II consta de tres capítulos. En el primero, capítulo 3, presento los resultados de un programa muy amplio de simulaciones numéricas, diseñado para tocar todos los distintos rangos de los parámetros. Tras una descripción detallada del modelo ϕ^4 estocástico, y unos primeros cálculos perturbativos simples, necesarios para obtener un umbral de ruido fuerte por comparación con las simulaciones, entro en las simulaciones propiamente dichas. Aparte de dar detalles sobre ellas, establezco una propiedad muy importante, y es que verifican un análogo discreto de una ley de evolución exacta del sistema continuo, una característica que hasta ahora no se había probado para ningún esquema en diferencias finitas —ni de otro tipo— para ecuaciones en derivadas parciales no lineales estocásticas. Asegurado por este y otros tests de la validez de las simulaciones, obtengo información sobre la dinámica de los *kinks*, y describo las características nuevas —crecimiento exponencial de la energía, difusiones anómalas— que aparecen cuando se considera la acción de ruidos fuertes sobre ellos. El resultado más interesante y novedoso a mi modo de ver es la existencia de una ley empírica que permite predecir semi-cuantitativamente el tiempo medio de estabilidad de los *kinks* bajo fluctuaciones del potencial, también algo que hasta ahora no tiene análogo en otros estudios. El capítulo se cierra con el estudio de lo que

sucede al modelo ϕ^4 estocástico cuando se tiene en cuenta la disipación, que eleva el umbral de ruido fuerte, y las posibles fronteras entre zonas normales y perturbadas, que dan lugar al *pinning* de *kinks* lentos.

El capítulo 4 está dedicado a la explicación analítica de lo encontrado en el capítulo 3. Por medio de una teoría perturbativa secular, cuyo desarrollo recojo de forma pormenorizada consigo, de una parte, fundamentar nuestros primeros cálculos perturbativos simples, y de otra, obtener expresiones explícitas para la contribución radiativa generada por la perturbación, que, al menos, permiten un análisis físico de lo que sucede en el modelo ϕ^4 estocástico a tiempos cortos, dónde “corto” no es un adjetivo absoluto sino que depende de la intensidad del ruido. La teoría tiene además la ventaja de que es completamente general y puede aplicarse a otros modelos ϕ^4 perturbados e incluso extenderse a modelos NKG más generales, teniendo además una idea de sus condiciones de aplicabilidad. Abordo además el problema del *pinning* en las fronteras, con éxito limitado debido a la dificultad que presentan las ecuaciones de las coordenadas colectivas en esta situación inhomogénea. Sin embargo, sí muestro cómo tales fronteras son capaces de inmovilizar *kinks* suficientemente lentos. El capítulo 4 concluye con una teoría lineal para la evolución de la radiación generada por el *kink* y forzada posteriormente por el ruido, que resulta tener mucho que ver con el crecimiento exponencial de la energía y la difusión anómala de los *kinks* bajo perturbaciones fuertes.

El último capítulo de esta parte es más breve y recoge los resultados numéricos para ruido dependiente del espacio, un campo que estaba totalmente inexplorado antes del presente trabajo. Este caso aparece mucho más inaccesible analíticamente por lo que el capítulo es esencialmente numérico y descriptivo. Lo más destacable es que los *kinks* son afectados de forma dramática por esta perturbación, que dificulta enormemente su propagación y los deforma de manera que las posibilidades de éxito de una teoría de coordenadas colectivas aparecen muy limitadas —aparte de que las dificultades matemáticas tampoco me inducen a ser muy optimista—. A cortos tiempos sí se puede obtener algún resultado analítico, mediante aproximaciones muy burdas, que sin embargo justifican la respuesta asimétrica de los *kinks* al ruido —fenómeno, como ya dije, que también sucede en sG—. Al final, intento ofrecer una idea cualitativa de este proceso y de los fenómenos que tienen lugar en el modelo desde un punto de vista discreto, con lo que doy fin al capítulo 5 y a la parte II.

La parte III tiene tan sólo dos capítulos, pero ya no se restringe al modelo ϕ^4 sino que abarca también al modelo sG. El primero de ellos, el capítulo 6, es, en realidad, un paso previo para el segundo. Su objetivo es estudiar los

fenómenos de interferencia que tienen lugar cuando se considera el *scattering* de solitones topológicos por dos impurezas puntuales. Sobre este punto, se conocían algunos resultados perturbativos de Kivshar, Kosevich y Chubykalo (1987, 1988, 1991) pero no estaba en absoluto claro cuál era su rango de aplicabilidad; peor aún, ni siquiera podía afirmarse que ese rango existiera, puesto que algunas de las aproximaciones que involucran podían ser lo bastante fuertes como para hacer la teoría inaplicable debido al *pinning* de los solitones. Una vez más, la comparación con el experimento numérico es definitiva, y a través de un buen número de simulaciones se prueba aquí que la teoría no sólo es aplicable sino francamente buena. Con la técnica de simulación —así comprobada a su vez por el acuerdo con la teoría—, me planteo el mismo problema en el modelo ϕ^4 para el que, como es habitual, su no integrabilidad impide aplicar la teoría que se usa en sG, basada en IST. Estudio los dos casos que aparecen de forma natural en ϕ^4 , acoplo lineal y no lineal. Si bien éste último resulta, como cabía esperar, muy similar a sG, no ocurre igual con el primero, y las simulaciones permiten afirmar que el efecto de interferencia es bastante más complicado, debido al papel que juega en este caso el modo de impureza. De todas maneras, los resultados de todos los experimentos numéricos, sobre todo en sG, pueden interpretarse muy bien en términos de la densidad espectral de las ondas emitidas por el *kink* en el proceso de *scattering*, tanto en lo tocante al efecto de interferencia que incluye la teoría como a las discrepancias entre teoría y experimento.

El capítulo 7 se beneficia del conocimiento adquirido sobre las interferencias para proponer un tratamiento aproximado del problema de general de propagación de solitones en redes de impurezas no excesivamente concentradas. La aproximación es en principio aplicable tanto a solitones en particular, como a ondas lineales o paquetes de ondas, y, por lo que respecta a los modelos NKG, a *kinks* o a excitaciones de pequeña amplitud. He preferido ocuparme de esta última cuestión por varias razones. La primera es que el trabajo analítico es relativamente simple y proporciona la posibilidad de llegar a escribir unas ecuaciones integro-diferenciales no lineales lo bastante sencillas como para permitir un estudio numérico exhaustivo. La segunda es que con ello los resultados aquí recogidos son válidos en un contexto más general que el de los modelos NKG puesto que incluye a los modelos NLS y a sus solitones envolvente; sabiendo que los solitones topológicos son más resistentes, ver que los solitones envolvente son poco afectados es un motivo de confianza para intentar generalizar la aproximación a *kinks*; es de esperar, en vista del capítulo 6, que se puedan propagar sin demasiados problemas en tales redes —si no son excesivamente largas. La última razón tiene que

ver con el ello de que en los últimos años ha habido una cierta controversia con el efecto que sobre el fenómeno de la localización (Anderson, 1958) tiene la inclusión de una no linealidad, por lo que en este capítulo quiero interpretar la casuística que se ha ido acumulando a la luz de nuevos resultados. Nuevos resultados que esencialmente tienen que ver con la posibilidad que encuentro de que la localización sea inhibida cuando los paquetes no lineales que se propagan son “bastante no lineales”—en el capítulo 7 se verá más claro que quiere decir esta frase—. Pruebo que existe un valor crítico de un parámetro relacionado con la no linealidad del solitón por encima del cuál este se propaga sin perder energía ni velocidad pese a la presencia de las impurezas. Tal prueba no es sólo numérica, sino que pese a que no he sido capaz de resolver las ecuaciones obtenidas, si he logrado probar de forma rigurosa cómo se comportan. A mi juicio, este resultado es de los más importantes que se recogen en la presente tesis. El capítulo incluye además material de revisión concerniente a los problemas de localización no lineales.

La tesis se cierra con la parte IV, en la que resumo lo obtenido y planteo una serie de cuestiones abiertas por este trabajo que creo interesantes, y que creo que deberían abordarse para ahondar en la comprensión de la física de los modelos no lineales desordenados.

II

Desorden Continuo

El modelo ϕ^4 bajo fluctuaciones del potencial. Simulaciones

“...las consecuencias de semejante acto repetido han de repercutir de tal manera sobre el aspecto físico del ermitaño que sería posible predecir con toda verosimilitud si resistirá o si morirá de agotamiento.”

Boris Vian, *El Otoño en Pekin*.

3.1 El modelo ϕ^4 estocástico

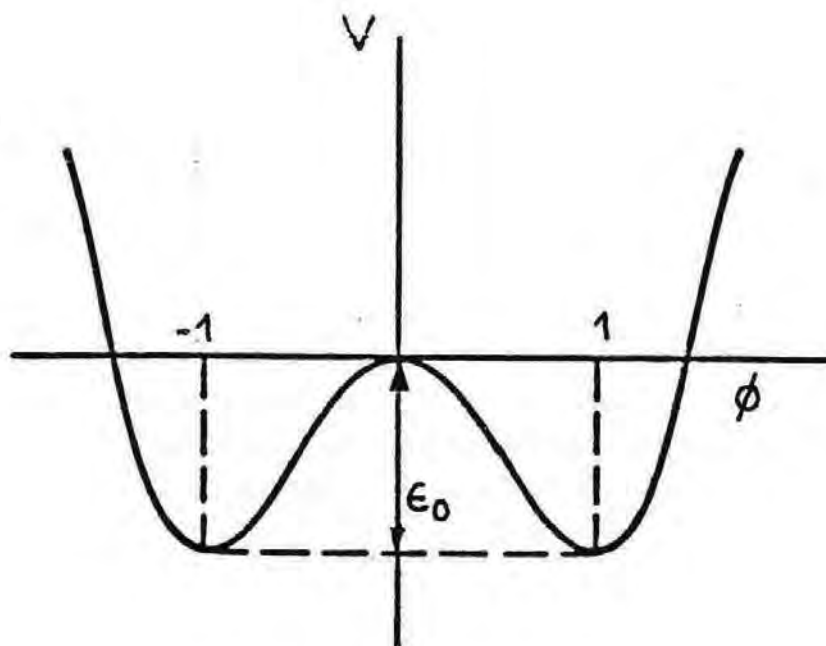
Como señalé en la introducción, el modelo ϕ^4 puede entenderse desde dos puntos de vista, discreto y continuo. En la práctica, ambos son equivalentes, si el modelo discreto no es “demasiado discreto” —especificaré luego más cuantitativamente que entiendo por demasiado discreto—, y, por tanto, he elegido presentar el modelo ϕ^4 estocástico desde este último punto de vista, por razones esencialmente de claridad.

El modelo ϕ^4 unidimensional usual, sin perturbar, es una cadena de N partículas que se define por la siguiente particularización del Hamiltoniano discreto NKG, Ec. (2.2), convenientemente adimensionalizado:

$$H = \sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_n}{dt} \right)^2 + \frac{\epsilon_0}{4} (1 - \phi_n^2)^2 \right] + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{2} (\phi_{n+1} - \phi_n)^2, \quad (3.1)$$

dónde ϕ_n representa el desplazamiento de la partícula n -ésima de su posición de equilibrio na , siendo a la constante de la red. Del Hamiltoniano (3.1) se obtienen por el procedimiento habitual las N ecuaciones ordinarias del movimiento de las N partículas del sistema, es decir

$$\frac{d^2\phi_n}{dt^2} - (\phi_{n+1} - 2\phi_n + \phi_{n-1}) - \epsilon_0(\phi_n - \phi_n^3) = 0, \quad n = 1, \dots, N, \quad (3.2)$$

Figura 3.1: El Potencial ϕ^4

sobre las que de momento no especificaré condiciones de contorno, que se pueden tomar de muchas maneras, como fijas — $\phi_1 = \phi_l, \phi_N = \phi_r$, siendo $\phi_{l,r}$ constantes reales— o periódicas — $\phi_{N+1} = \phi_1, \phi_0 = \phi_N$ —, por ejemplo.

En lo que sigue, será esencial entender lo que representan los términos del Hamiltoniano (3.1), por lo que me parece importante detenerse en ellos. El primer término, $d\phi_n/dt$, no es más que la energía cinética de la partícula n -ésima. El segundo, $\epsilon_0(1 - \phi_n^2)^2/4$, es un potencial, independiente para cada partícula y asociado a su posición de equilibrio, que en el lenguaje de cadenas no lineales se acostumbra a llamar *potencial substrato*. Tal potencial —que se puede ver en la figura 3.1— tiene la forma de un doble pozo, confinante si $\epsilon_0 > 0$ y con una barrera entre un pozo y otro, situados en $\phi = \pm 1$ de altura ϵ_0 . En cuanto al último término, $(\phi_{n+1} - \phi_n)^2/2$, es un acoplo armónico entre vecinos próximos.

La elección de estos tres términos no es en modo alguno caprichosa, sino que responde a un intento de modelar situaciones reales. Tal vez, el sistema físico en el que más fácilmente se ve el paralelismo con el modelo ϕ^4 es la molécula de *trans-poliacetileno* — $(CH)_x$, el polímero más estudiado. Dicha molécula está representada en la figura 3.2. Para entender su relación con el modelo ϕ^4 , es preciso hacer algunos comentarios —que tomo de Roth y Bleier (1987)— sobre ella, pero creo que merece la pena. A temperaturas

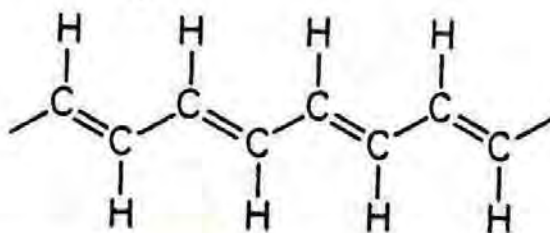


Figura 3.2: La molécula de trans-poliacetileno, $(CH)_x$

muy altas, del orden de 10 000 K el poliacetileno tendría sus átomos de carbono unidos entre sí sólo por enlaces simples. El electrón restante no habría “decidido” aún, por así decir, hacia que lado establecer el doble enlace, si con el carbono de su derecha, si con el de su izquierda. El estado del poliacetileno sería entonces metálico, con una banda a medio llenar, y los electrones p estarían totalmente deslocalizados. En realidad, según ésto, debería denominarlos electrones π . Cuando tal metal se enfría, se produce la *transición metal-aislante o de Peierls* (Peierls, 1955). Se forman una onda de densidad de carga electrónica y una distorsión de la red de los grupos CH. Simultáneamente se abre un *gap* a nivel de Fermi —a media banda— que permite al sistema rebajar su energía electrónica. Parte de esa energía se almacena en la red distorsionada, pero el balance total es positivo para el sistema CH-electrones. Ese *gap* transforma el metal en un semiconductor, y si se baja aún más la temperatura, en un aislante.

Es la distorsión Peierls la que *polimeriza* el poliacetileno y fija los enlaces dobles. Estos dan lugar a distancias carbono-carbono más cortas que los enlaces simples. En el lenguaje del modelo ϕ^4 , lo que estaría sucediendo es que a elevada temperatura, los carbonos “ven” un potencial substrato homogéneo originado por la nube electrónica π . Cuando se forma la onda de densidad de carga, ese potencial substrato homogéneo se convierte en un

doble pozo, y el carbono, que no tiene energía suficiente para fluctuar sobre la barrera recién creada, debe “decidir” en qué pozo se coloca, y el material se polimeriza. Así, tengo ya las partículas del modelo ϕ^4 —los átomos de carbono—, con su potencial substrato —la onda de densidad de carga—, y con su enlace armónico —el enlace químico covalente entre átomos vecinos—.

Como se ve, el modelo ϕ^4 reproduce muy bien la *fenomenología* del poliacetileno: proporciona un modelo abstracto de la estructura con la misma dinámica que la molécula real en muy buena aproximación —ver los cálculos de propagación para el Hamiltoniano cuántico propuesto por Su *et al.* (1979, 1980) llevados a cabo por Guinea (1984)—. Sin embargo, esto podría distar mucho de la realidad debido a que una hipótesis subyacente no se cumpa. Esa hipótesis es que la nube de electrones π transformada en onda de densidad de carga por transición Peierls, origen del potencial substrato, sea completamente *rígida*. Parece claro que esto no tiene por qué ser así y que además no va a ser así en condiciones reales, debido, por ejemplo, a la simple agitación térmica de los electrones a temperatura finita. La rigidez de la onda de densidad de carga puede perderse también debido a interacciones con campos electromagnéticos parásitos, que no son precisamente raros en nuestro mundo tecnificado. Otra causa de modificación del potencial ϕ^4 tendría su origen en las fluctuaciones cuánticas que afectarían ineludiblemente a los electrones. Por último, es incluso posible provocar este tipo de agitación artificialmente, excitando los electrones de los enlaces dobles con un láser, por ejemplo.¹

¿Cómo puedo incluir la movilidad de los electrones, fundamentalmente la inevitable térmica, en el modelo fenomenológico del trans-(CH)_x? Para hacerlo, recurriré a un resultado de Beloshapkin *et al.* (1989). Ellos han probado que si se tienen en cuenta las fluctuaciones térmicas y cuánticas en la cadena ϕ^4 , la consecuencia más importante es una simple renormalización de la barrera de potencial que separa un pozo del otro. Ello sugiere que una manera no muy descabellada de incluir este tipo de efectos en el modelo original, dado por el Hamiltoniano (3.1), podría ser transformar la constante que era allí ϵ_0 en una función del tiempo, es decir, $\epsilon_0 \rightarrow 1 + \xi(t)$, donde tomo como unidad de energías la altura primitiva de la barrera.

Restaría ahora elegir la función $\xi(t)$ que representa como va cambiando la altura de la barrera con el tiempo. Si se elige que $\xi(t)$ sea un proceso estocástico, lo que se intenta ver es que sucede en el modelo bajo variaciones erráticas, aleatorias, del potencial, lo que tendría en principio bastante que

¹Agradezco a Francisco Guinea sus explicaciones sobre el tema del poliacetileno y su modelización por ϕ^4 .

ver con el carácter también aleatorio de las fluctuaciones, bien sean térmicas o cuánticas. Estoy entonces ante lo que llamo *modelo ϕ^4 estocástico*. Por otra parte, de entre todo el universo de procesos estocásticos, tomo como $\xi(t)$ lo que se denomina ruido blanco gaussiano —ver, por ejemplo, Van Kampen (1981), Gardiner (1983) o Risken (1984)—. El ruido blanco gaussiano se define como un proceso de Markov —la probabilidad de que $\xi(t)$ tome un cierto valor depende sólo de uno de los instantes anteriores— estacionario —la correlación entre los valores de $\xi(t)$ en tiempos distintos sólo depende de la diferencia de tiempos—, con correlación

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2D\delta(t - t'); \quad (3.3)$$

por conveniencia, y sin perder generalidad, tomo $\langle \xi(t) \rangle = 0$, puesto que de tener media no nula, podría sumarse a la parte constante de ϵ_0 dicha media y usar un ruido blanco de media cero.

Además de las motivaciones físicas que he expuesto más arriba, esta elección ha de verse dentro de la corriente de los trabajos anteriores, que he recogido en el Capítulo 2, y que se enmarca en el esfuerzo general por entender los efectos de perturbaciones estocásticas, no sólo en el modelo ϕ^4 ni en los modelos NKG, sino en todos los modelos no lineales en general —ver el *review* de Bass *et al.* (1988) dedicado a la dinámica de solitones bajo perturbaciones estocásticas en diversos modelos—. En lo que se refiere al modelo ϕ^4 en particular, ya mencioné que había dos cuestiones previas abiertas por los trabajos de Bass *et al.* (1986) y los de Rodríguez-Plaza (1988) y Rodríguez-Plaza y Vázquez (1990): acoplos no lineales entre el campo y las fluctuaciones, y estimaciones de la radiación. Así las cosas, el presente trabajo es continuación natural de los anteriores, puesto que pretende aportar algunas respuestas a estas cuestiones.

El objeto sobre el que voy a centrar mi atención es el *kink* de ϕ^4 , cuya expresión ya he escrito previamente, en la Ec. (2.4). Esta onda solitaria, que, insisto, no es un solitón propiamente dicho, tiene también su razón de ser física, y para entenderlo, volveré a la analogía del trans-poliacetileno. Cuando tiene lugar la transición Peierls, o bien cuando se forman las cadenas de CH, puede ocurrir que en una zona los dobles enlaces estén a un cierto lado, por ejemplo a la derecha de los átomos de carbono, y en otra zona al otro lado, en este caso a la izquierda —ver figura 3.3—. En la zona límite entre ambas zonas aparece evidentemente un defecto, conocido como *defecto configuracional*: habrá un átomo de carbono que esté enlazado con sus vecinos sólo por enlaces simples, y habrá por tanto un exceso de carga positiva. También puede ocurrir el defecto del sentido opuesto. En

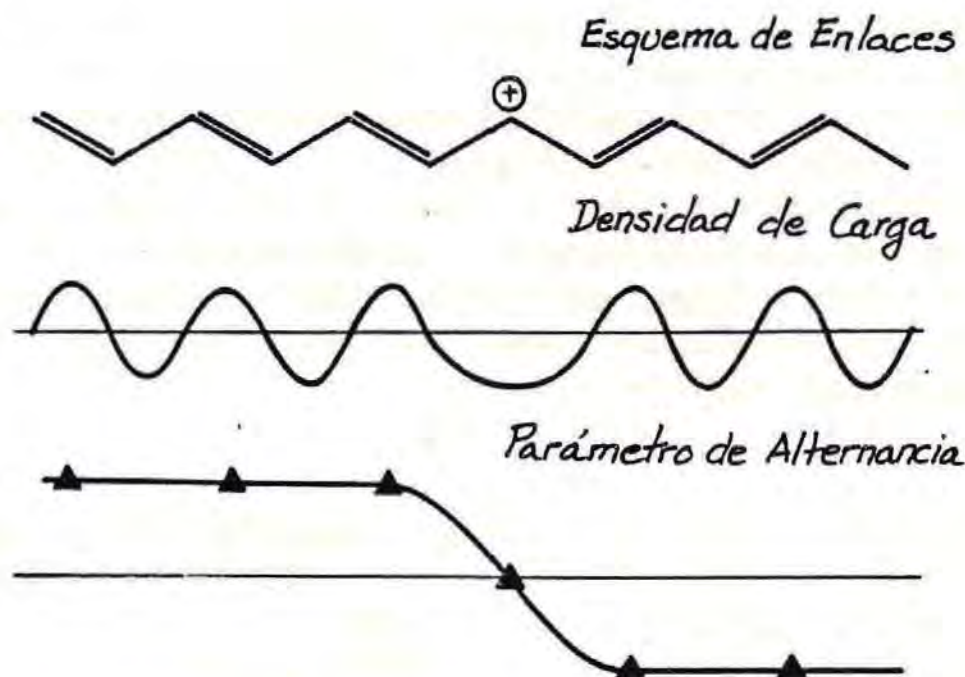


Figura 3.3: Solitones en trans-poliacetileno, $(\text{CH})_x$

cualquier caso, ambos son móviles —y muy peculiares, puesto que tienen número fermiónico $1/2$, ver Jackiw y Schrieffer (1981); Roth y Bleier (1987) o Heeger *et al.* (1988)— y pueden desplazarse a lo largo de la cadena de átomos impulsados por campos eléctricos, por ejemplo. En la figura aparece también el solitón de ϕ^4 para comparación; el campo ϕ correspondería al llamado *parámetro de alternancia*, $\phi_n \equiv 2(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1})/(x_{n+1} - x_{n-1})$, siendo x_n la posición del grupo CH n -ésimo. Estos solitones se han detectado experimentalmente —ver referencias en Roth y Bleier (1987) y en Heeger *et al.* (1988)—. Tiene entonces interés el que me ocupe en ver si las fluctuaciones del potencial impiden su propagación, puesto que se ha pensado en ellos como portadores de carga en semiconductores orgánicos contruidos a base de polímeros más complejos que el poliacetileno. Y tiene también interés desde el punto de vista más matemático de la estabilidad de soluciones solitónicas bajo perturbaciones estocásticas.

Antes de entrar en el trabajo propiamente dicho, conviene hacer algunas observaciones sobre la forma en que actúa la perturbación que he introducido al modificar ϵ_0 y convertirlo en un parámetro estocástico, para poder luego entender mejor los efectos de tal aleatoriedad. Puesto que la altura de la barrera es un factor que afecta a todo el potencial, es decir, a todo el término $(1 - \phi_n^2)^2$, es obvio que las partículas en las *colas* —también llamadas *alas*—

del *kink*, aquellas cuyo desplazamiento relativo es $\phi_n \approx \pm 1$ y que por tanto están muy cerca de uno de los dos pozos del potencial, no sienten los cambios que se producen al azar en cada instante de tiempo en la barrera, y por tanto se comportan como si no hubiera perturbación en absoluto. En consecuencia, sólo el centro de los *kinks*, inicialmente sin perturbar —el dato inicial de las simulaciones es un solitón dado por (2.4) puesto que es el objeto por cuya estabilidad me pregunto; ello equivale a tener un *kink* propagándose y en un cierto instante, que tomo como origen de tiempos, “enchufar” el ruido— sufrirá el ruido en los estadios más tempranos de la evolución. He de destacar que en los ruidos lineales estudiados por Rodríguez-Plaza (1988) y Rodríguez-Plaza y Vázquez (1990) afectan esencialmente a las alas del *kink* y por ello este se ve mucho más modificado que en mi caso —de hecho resulta afectado por ruidos mucho más débiles que los necesarios en el caso no lineal que estudio—. Por otra parte, es también importante tener en cuenta que la perturbación que estudio cambia la escala del potencial, pudiendo incluso llegar a voltearlo pero preserva su forma, o sea, siempre hay tres extremos, dos mínimos locales y un máximo local o a la inversa, mientras que las perturbaciones lineales (Rodríguez-Plaza, 1988; Rodríguez-Plaza y Vázquez, 1990) pueden hacer cambiar la forma del potencial transformándolo en un pozo simple y eliminando dos de sus extremos —un mínimo y un máximo.

3.2 Aproximación adiabática y ruido débil

Una vez introducido el modelo que va a ser objeto de estudio en esta parte de la tesis, paso a tal estudio propiamente dicho. Mi primer objetivo va a ser intentar estimar de alguna forma las consecuencias más importantes que la aleatoriedad que en el modelo ϕ^4 estocástico aparece en la barrera de potencial tiene sobre los *kinks*. Para ello voy a recurrir a dos aproximaciones. La primera no es excesivamente drástica: tomar el límite continuo de la Ec. (3.2). Ya me he referido varias veces en la Introducción a este límite, y también he mencionado, al comienzo de este capítulo, que los modelos discreto y continuo son equivalentes cuando aquél no es demasiado discreto. Seré más preciso, y utilizando la terminología de Aubry (1975, 1976), diré que la ecuación ϕ^4 , Ec. (1.3), conduce a los mismos resultados del modelo discreto en el *régimen displacivo* —no he encontrado una buena traducción para *displacive regime*, nombre dado por Aubry—. El régimen displacivo es aquél en que el acoplamiento armónico es lo bastante fuerte como para no permitir más que variaciones suaves de ϕ_i de un nodo i al vecino. En la

práctica, esto es lo mismo que decir que el espaciado de la red es pequeño frente a la anchura de los solitones. Esto no es una gran restricción: es fácil comprobar que simulaciones numéricas del sistema ϕ^4 con un mallado espacial de un décimo de la anchura del *kink* no presentan efectos de discretización hasta tiempos muy largos. Por tanto, tomo el límite continuo $na \rightarrow x$ —como siempre, a representa el espaciado de la red— de la Ec. (3.2) y recupero la ecuación ϕ^4 , que reescribo:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \epsilon_0 (\phi - \phi^3) = 0, \quad (3.4)$$

dónde el factor ϵ_0 da cuenta de la perturbación estocástica.

La segunda aproximación, la aproximación adiabática, de la que también he hablado, sí es bastante restrictiva, y pertenece a la clase de técnicas de tipo coordenadas colectivas; es decir, nos va a permitir reducir el problema a un número finito de grados de libertad para describen el movimiento del solitón. Aquí voy a llevar esto a cabo siguiendo el procedimiento que McLaughlin y Scott (1978) denominaron *análisis energético*. En el capítulo 4 obtendré las mismas ecuaciones de otra manera, que también permitirá clarificar el significado profundo de la aproximación adiabática. Todavía se pueden obtener de otra forma: ver Bass *et al.* (1986).

La hipótesis principal de esta aproximación es la siguiente: en el régimen de ruido débil —por debajo de un umbral de intensidad a determinar *a posteriori*— la generación de radiación es despreciable y el efecto predominante de la perturbación sobre el *kink* es modular su posición y su velocidad, que pasan de ser constantes a ser funciones desconocidas del tiempo. Aceptar esta premisa equivale a postular el siguiente *ansatz*

$$\phi(x, t) = \tanh \psi(x, t), \quad \psi(x, t) \equiv \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}} [x - z(t)] \right) \quad (3.5)$$

como solución de la ecuación ϕ^4 perturbada, Ec. (3.4). Para que se preserve la forma del *kink* —y poder obtener ecuaciones cerradas—, es necesario añadir además las ligaduras

$$\psi_x = \frac{\gamma}{\sqrt{2}}, \quad \psi_t = -\frac{\gamma v}{\sqrt{2}}, \quad (3.6)$$

dónde he definido $z'(t) = v(t) + x'_0(t)$, que no es otra cosa que introducir esas funciones desconocidas del tiempo que dan la posición y velocidad del *kink*. Para obtener las ecuaciones que nos permitan determinarlas debo recurrir al análisis energético, lo que voy a hacer a continuación.

En el modelo ϕ^4 perturbado, con la elección de ϵ_0 dependiente del tiempo, las cantidades que eran conservadas en ausencia de perturbación ya no lo son, excepto la carga topológica. El análisis energético utiliza este hecho para encontrar las ecuaciones de evolución de la posición y velocidad del *kink* mediante el siguiente argumento de consistencia: la energía total evoluciona ahora de acuerdo a

$$\frac{dE}{dt} = \xi(t) \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_t (\phi - \phi^3). \quad (3.7)$$

Por otra parte, el centro de energía, que se define

$$X = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} dx x \left[\frac{1}{2}(\phi_t^2 + \phi_x^2) + \frac{1}{4}(\phi^2 - 1)^2 \right], \quad (3.8)$$

sigue la ley

$$\frac{dX}{dt} = P - \xi(t) \int_{-\infty}^{\infty} dx x \phi_t (\phi - \phi^3). \quad (3.9)$$

Si ahora inserto en las ecuaciones (3.7) y (3.9) el *ansatz* dado por la Ec. (3.5), sabré como cambian en el tiempo la energía y el centro de energía del solitón de velocidad y posición variables. Por otro lado, esto mismo se puede hacer en el orden inverso, o sea: considerar primero el *ansatz* (3.5) y calcular su energía y su centro cuando no hay ruido, con lo que resulta

$$E[\phi_v] = \frac{4\gamma}{3\sqrt{2}}, \quad (3.10)$$

$$X[\phi_v] = vt + x_0. \quad (3.11)$$

Hecho esto, puedo derivar estas expresiones con respecto al tiempo y de nuevo tendré la variación de energía y centro de energías para el *kink* dado por la ecuación (3.5). Y aquí entra el argumento de consistencia: los resultados obtenidos no deben depender del orden en que he calculado, particularizando primero y derivando después o viceversa, así que igualo las variaciones calculadas de ambas formas y llego a

$$v'(t) = 0, \quad (3.12)$$

$$z'(t) = v(t) - \frac{1}{2}v(t) [1 - v^2(t)] \xi(t). \quad (3.13)$$

Estas son las expresiones finales que resultan de hacer la aproximación adiabática y utilizar el análisis energético. Suele utilizarse el nombre *ecuaciones de Langevin* del *kink* para referirse a ellas, en clara alusión a la ecuación de Langevin para una partícula browniana puntual.

Lo primero que se deduce de las ecuaciones (3.12) y (3.13) es que, en el marco de la aproximación adiabática, la función v , una de las contribuciones al movimiento del *kink*, no se ve afectada por la perturbación y es en realidad una constante. La velocidad del *kink*, que es z' , sí es afectada, y se convierte a su vez en un proceso estocástico, por lo que la información que pueda obtener sobre ella será de carácter esencialmente estadístico. Sus dos primeros momentos, es decir, su valor medio y su variancia o dispersión, se pueden calcular sin dificultades, y resultan ser

$$\langle z(t) \rangle = v_0 t, \quad (3.14)$$

$$\sigma_z^2(t) \equiv \langle z^2(t) \rangle - \langle z(t) \rangle^2 = \frac{D}{2} v_0^2 (1 - v_0^2) t. \quad (3.15)$$

dónde he tomado condiciones iniciales para el *kink* $z_0(0) = 0$, $v(0) = v(t) = v_0$ sin pérdida de generalidad. Se ve así que el efecto del ruido —en esta aproximación— es únicamente introducir una incertidumbre en la posición del *kink*, dada por su dispersión $\sigma_z(t)$. La teoría perturbativa predice que dicha dispersión crecerá como la raíz cuadrada del tiempo, como si el solitón, en su sistema de referencia propio —es decir, en el sistema de referencia en que está en reposo—, imitara el movimiento de una partícula Browniana puntual. Además, el prefactor en la Ec. (3.15) se hace máximo cuando $v_0 = 1/\sqrt{2} \simeq 0.7$, y se anula si $v_0 = 0$ ó $v_0 = 1$. Aquí aparece por vez primera el hecho de que los efectos del ruido van a depender de la velocidad del *kink*, aunque la predicción es que esta dependencia es bastante simple. Luego se verá que el panorama es más complicado.

Si hubiera añadido una contribución disipativa al modelo ϕ^4 estocástico de manera fenomenológica —puesto que no se deriva del Hamiltoniano dado por (3.1)—, introduciendo un término $-\alpha\phi_t$ en la ecuación (3.4), el cálculo anterior me hubiera llevado a

$$v'(t) = -\alpha\gamma v(t), \quad (3.16)$$

mientras que el comportamiento de $z(t)$ seguiría siendo descrito por la ecuación (3.13). Para ver qué aporta la fricción, me ocupo en primer lugar de $v(t)$, que se obtiene de la Ec. (3.16) como

$$v(t) = v_0 \left[v_0^2 + (1 - v_0^2) \exp(2\alpha t) \right]^{-1/2}. \quad (3.17)$$

Ahora tengo que sustituir esta expresión en la evolución de $z(t)$, Ec. (3.13), y de nuevo hacer estadística y obtener su valor medio y su desviación, que

pasan a ser

$$\langle z(t) \rangle = \frac{1}{2\alpha} \log \left\{ \left(\frac{1+v_0}{1-v_0} \right) \frac{[v_0^2 + (1-v_0^2) \exp(2\alpha t)]^{1/2} - v_0}{[v_0^2 + (1-v_0^2) \exp(2\alpha t)]^{1/2} + v_0} \right\}, \quad (3.18)$$

$$\sigma_z^2(t) = \frac{Dv_0^2}{8\alpha} \left\{ 2 - v_0^2 - \frac{v_0^2 + (1-v_0^2) 2 \exp(2\alpha t)}{[v_0^2 + (1-v_0^2) \exp(2\alpha t)]^2} \right\}, \quad (3.19)$$

como se puede comprobar tras algunos cálculos no muy complicados, pero tediosos.

Vale la pena hacer algunas observaciones sobre estos resultados. En primer lugar, se comprueba rápidamente que si no hay disipación, las ecuaciones (3.14) y (3.15) se obtienen de las Ecs. (3.18) y (3.19) en el límite $\alpha \rightarrow 0$, con lo que ambas parejas de expresiones son consistentes. Por otra parte, si $t \rightarrow 0$, se tiene que $\langle z(t) \rangle \rightarrow 0$ y $\sigma_z^2(t) \rightarrow 0$, como cabría esperar; en el límite opuesto, $t \rightarrow \infty$, ambas funciones van a un valor finito que es

$$\langle z(t) \rangle \xrightarrow{t \rightarrow \infty} z_0 + \frac{1}{2\alpha} \log \left(\frac{1+v_0}{1-v_0} \right), \quad (3.20)$$

$$\sigma_z^2(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{Dv_0^2}{8\alpha} (2 - v_0^2). \quad (3.21)$$

Este hecho implica que, si nuestra hipótesis es correcta —no hay producción de radiación o es despreciable— el *kink* es finalmente parado en el punto dado por la Ec. (3.20) y su dispersión deja de crecer debido a la disipación. Se ve además que, si v_0 es pequeña, la posición final del *kink* es muy cercana a z_0 , es decir, el *kink* casi no llega a moverse, mientras que si $v_0 \simeq 1$, el punto límite del movimiento está muy alejado del inicial. Esto tiene sentido físico, como también lo tiene el hecho de que los valores finales de $\langle z(t) \rangle$ y $\sigma_z(t)$ sean inversamente proporcionales a la disipación α . De todo esto se desprende que los resultados de la aproximación adiabática son coherentes e interpretables físicamente, una condición mínima que debe cumplir cualquier teoría perturbativa. Ello no garantiza, sin embargo, que sea aplicable: determinar su rango de validez, y describir la dinámica de los *kinks* cuando las predicciones analíticas dejan de ser válidas, es el propósito del resto de este capítulo.

3.3 Detalles del procedimiento numérico

Antes de entrar en los resultados de las simulaciones, me parece que es de rigor exponer con cierto detalle el procedimiento empleado. Esta exposición

se omite a menudo en los artículos, lo que, a mi juicio, los convierte en poco sistemáticos, puesto que el desconocimiento del método empleado impide cualquier tipo de valoración de los resultados obtenidos. De ello me ocupo en una primera subsección; a continuación, dedico otra a explicar qué tests he llevado a cabo del procedimiento numérico así como de la forma de obtener promedios.

3.3.1 Esquema numérico

El esquema numérico con el que he trabajado, no sólo aquí sino en todas las simulaciones que se incluyen en la tesis, está basado en el método en diferencias finitas propuesto originalmente por Strauss y Vázquez (1978) —en lo sucesivo, SV— y es

$$\begin{aligned} & \frac{\phi_j^{n+1} - 2\phi_j^n + \phi_j^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{\phi_{j+1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n}{\Delta x^2} + \alpha \frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}}{2\Delta t} + \\ & + \frac{1}{4} (1 + \xi^n) \frac{[(\phi_j^{n+1})^2 - 1]^2 - [(\phi_j^{n-1})^2 - 1]^2}{\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}} = 0, \end{aligned} \quad (3.22)$$

dónde $\phi_j^n \equiv \phi(j\Delta x, n\Delta t)$, Δx y Δt son respectivamente los pasos de integración espacial y temporal, y ξ^n es la discretización del ruido en el instante $n\Delta t$. Esta discretización no es trivial. Cuando el ruido se interpreta en el sentido de Stratonovič (van Kampen, 1981; Gardiner, 1983; Risken, 1984), ξ^n debe tomarse de un generador de números pseudoaleatorios con distribución gaussiana, de media cero y dispersión $D_{num} \equiv D \times (\Delta t)^{-1}$ (Pascual, 1985; Rodríguez-Plaza y Vázquez, 1990), dónde D es el coeficiente analítico que aparece en la Ec. (3.3).

La elección de este esquema se debe esencialmente a dos razones. La primera es que, en ausencia de disipación y perturbaciones, su estabilidad y convergencia pueden demostrarse exactamente (Guo Ben-Yu y Vázquez, 1983), utilizando el hecho de que es *conservativo*, o sea, de que existe un análogo discreto de la energía total, Ec. (2.5), dado por

$$\begin{aligned} E^n \equiv & \Delta x \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{\phi_j^n - \phi_j^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\phi_j^n - \phi_{j-1}^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{\phi_j^{n-1} - \phi_{j-1}^{n-1}}{\Delta x} \right) + \\ & + \frac{1}{8} \{[(\phi_j^n)^2 - 1]^2 + [(\phi_j^{n-1})^2 - 1]^2\}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

que permanece invariante en la evolución temporal discreta —por otro lado, nótese que no es otra cosa que una discretización de la Ec. (2.5)—. El carácter conservativo da al esquema, a cambio de algo menos de precisión a corto tiempo y algo más de tiempo de CPU, una gran fiabilidad a largos tiempos.

La otra razón para elegir este método es que ha sido muy utilizado y estudiado, por lo que es bien conocido. Se ha usado previamente para estudiar perturbaciones estocásticas en los trabajos de Pascual y Vázquez (1985), Rodríguez-Plaza (1988) y Rodríguez-Plaza y Vázquez (1990). En cuanto a su estudio, fue llevado a cabo por Jiménez (1988) y Jiménez y Vázquez (1990). Este último artículo comparaba el esquema SV con el de Ablowitz *et al.* (1979) y algunos más, comparación que se presentaba como necesaria en el libro de Dodd *et al.* (1982), y lo que se pudo concluir es que el único esquema de los considerados que estaba libre de caos espúreo o numérico era el SV, por lo que parece la elección obvia. Claro está que en el momento en que se incluye la perturbación en el sistema, estos resultados —convergencia, estabilidad, ausencia de caos, conservatividad— ya no son válidos; pero, al menos, debe partirse de un esquema que presente buenas propiedades para la ecuación base —que la evolución del sistema discreto reproduzca la del sistema continuo— o, de lo contrario, no se podrían sacar conclusiones sobre el comportamiento aleatorio, que podría estar originado por el mismo esquema. Además, no se ha probado de forma rigurosa, que yo sepa, la convergencia y estabilidad de ningún esquema en diferencias para ecuaciones en derivadas parciales estocásticas, lo que es otro motivo para recurrir a aquel procedimiento que, en lo conocido, se ha mostrado fiable. En cualquier caso, como se verá en la siguiente subsección, el esquema SV estocástico hereda las buenas características del no perturbado.

Concluyo estas líneas sobre el procedimiento con un resumen de los parámetros que he empleado en las simulaciones:

- $\Delta x = 2\Delta t = 0.05$. La elección de Δx está de acuerdo con la idea de trabajar en el régimen disipativo y evitar los efectos de discretización, puesto que en las unidades adimensionales en que he planteado el problema (3.4), la anchura del *kink* está en torno a $4 = 80\Delta x$.
- Número de puntos de la malla espacial: 401.
- Condiciones de contorno: 200 puntos adicionales en cada lado no sometidos a ruido, para evitar interferencia con la reflexión en las fronteras computacionales. En ellas, se imponen condiciones de contorno fijas

— $\phi_t(-L, t) = \phi_t(L, t) = 0$ —. Algunas simulaciones se repitieron con otras elecciones más complejas, y los resultados fueron los mismos.

- Datos iniciales: *kinks* con diferentes velocidades, en el rango $0 < v_0 < 0.99$. Los *kinks* con velocidades aún mayores —que se acostumbra a llamar *ultrarrelativistas*, son demasiado estrechos debido a la contracción Lorentz, y presentan efectos discretos.
- Intensidades de ruido: $10^{-3} < 2D < 1$.

3.3.2 Promedios y consistencia del esquema

No creo que sea preciso señalar que el primer punto que uno debe verificar en este tipo de problemas estocásticos es la forma en que se calculan los promedios. Yo lo he hecho generando un cierto número de realizaciones de lo que ahora es un proceso estocástico, $\phi(x, t)$; es decir, calculé $\phi(x, t)$ para diferentes secuencias de números pseudoaleatorios ξ^n , y promedíé las magnitudes que me interesaban —y que especificaré luego— sobre este conjunto de trayectorias. La cuestión que surge automáticamente es cuál es el número apropiado de realizaciones que debe contener el conjunto. En investigaciones previas (Pascual y Vázquez, 1985; Rodríguez-Plaza y Vázquez, 1990) se usaron 15 y 30 realizaciones para calcular valores medios y dispersiones. Recientemente, los cálculos de Pascual y Vázquez fueron repetidos (Biller y Petruccione, 1990; Petruccione y Biller, 1990) con 2 000 realizaciones en un CRAY —y con distinto esquema—, y lo obtenido confirmó los promedios ya conocidos. Así pues, he vuelto a escoger aquí como conjuntos base para promediar 30 realizaciones —cada una de las cuales necesita dos minutos de CPU en un IBM 3090-150—. ² En algún caso, he tomado también 60 trayectorias para comparación, obteniendo siempre buen acuerdo, como se ve en el ejemplo de la figura 3.4, en la que represento con líneas a trazos y continuas los resultados obtenidos para el centro y su dispersión partiendo de un mismo *kink* con 30 y 60 realizaciones respectivamente —datos de la simulación: $v_0 = 0.5$, $z_0 = -5$, $2D = 0.1$, $\alpha = 0$ —. Puedo estar de esta manera bastante seguro de que el comportamiento estocástico del *kink* viene de su naturaleza aleatoria y no de una estadística pobre.

En todo caso, la forma correcta de asegurar la fiabilidad de cualquier cálculo numérico es comprobar si se verifican propiedades del sistema que se conozcan exactamente. Desafortunadamente, el conocimiento acumulado sobre ecuaciones no lineales estocásticas en derivadas parciales es muy poco, y

²Cortesía del C.I.E.M.A.T.

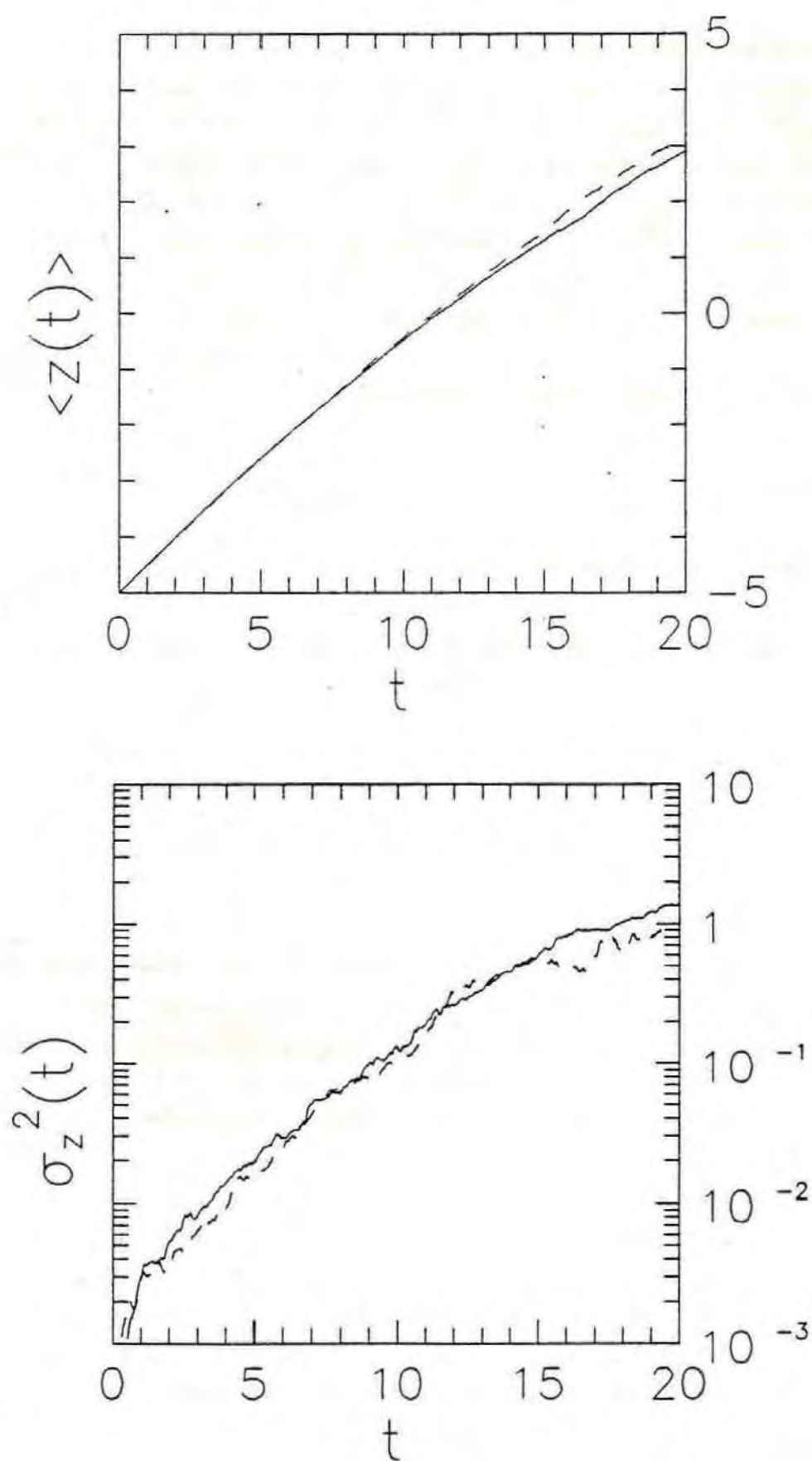


Figura 3.4: Estudio del número de realizaciones

tan sólo algunos resultados aislados se han podido establecer rigurosamente. Sin embargo, no hace mucho, el uso combinado de técnicas geométricas y de la formulación hamiltoniana de los sistemas NKG permitió a Parrondo *et al.*³ (1990) deducir propiedades exactas para estas ecuaciones, no sólo bajo ruido blanco sino también con ruidos de color. Su hallazgo más importante desde el punto de vista de la ecuación que estudio aquí es que la energía total, Ec. (2.5), una vez promediada, verifica una ecuación integrodiferencial que puede escribirse explícitamente —que llamaré por las iniciales de sus autores PMR—. No entraré en su demostración —ver Parrondo *et al.* (1990)— y me limitaré a citar la ecuación:

$$\frac{d \langle E \rangle}{dt} = -\alpha \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle |\phi_t|^2 \rangle + 2D \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle (-\phi + \phi^3)^2 \rangle. \quad (3.24)$$

He de insistir en que esta expresión es exacta y no involucra ninguna aproximación; por tanto, proporciona un excelente criterio para verificar las simulaciones numéricas. En todas ellas he estudiado si la versión discreta de la ecuación PMR, dada por

$$\begin{aligned} \frac{\langle E^n \rangle - \langle E^{n-1} \rangle}{\Delta t} = & \sum_{j=-N/2}^{N/2} \left\{ -\alpha \Delta x \left\langle \left(\frac{\phi_j^n - \phi_j^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 \right\rangle + \right. \\ & \left. + \Delta x \langle (-\phi_j^n + (\phi_j^n)^3)^2 \rangle \right\}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

se cumplía o no, siendo N el número de puntos espaciales y n el paso temporal en el que se calcula. Para todos los datos iniciales e intensidades del ruido la verificación resultó francamente satisfactoria, como se puede ver en la figura 3.5 — $v_0 = 0.2$, $\alpha = 0$; arriba, $2D = 0.01$; en el centro, $2D = 0.1$, y abajo, $2D = 0.25$. Las líneas sólidas fueron obtenidas con la definición de la energía, Ec. (2.5), y las punteadas con la ecuación PMR, Ec. (3.25)—. En dicha figura, hay que advertir que las escalas cambian de una gráfica a otra porque los incrementos de la energía también lo hacen, y por un orden de magnitud, a pesar de lo cual el acuerdo siempre es excelente —el hecho de que la energía tiene que ser creciente es obvio de la Ec. (3.24)—. En todas las demás figuras que aparecen en este capítulo se puede comprobar que también se mantiene el acuerdo, pues en todas represento los valores de la energía total media obtenidos por los dos procedimientos.

³Agradezco a Juan M. R. Parrondo y Manuel Mañas las discusiones que hemos tenido sobre su trabajo y su relación con éste.

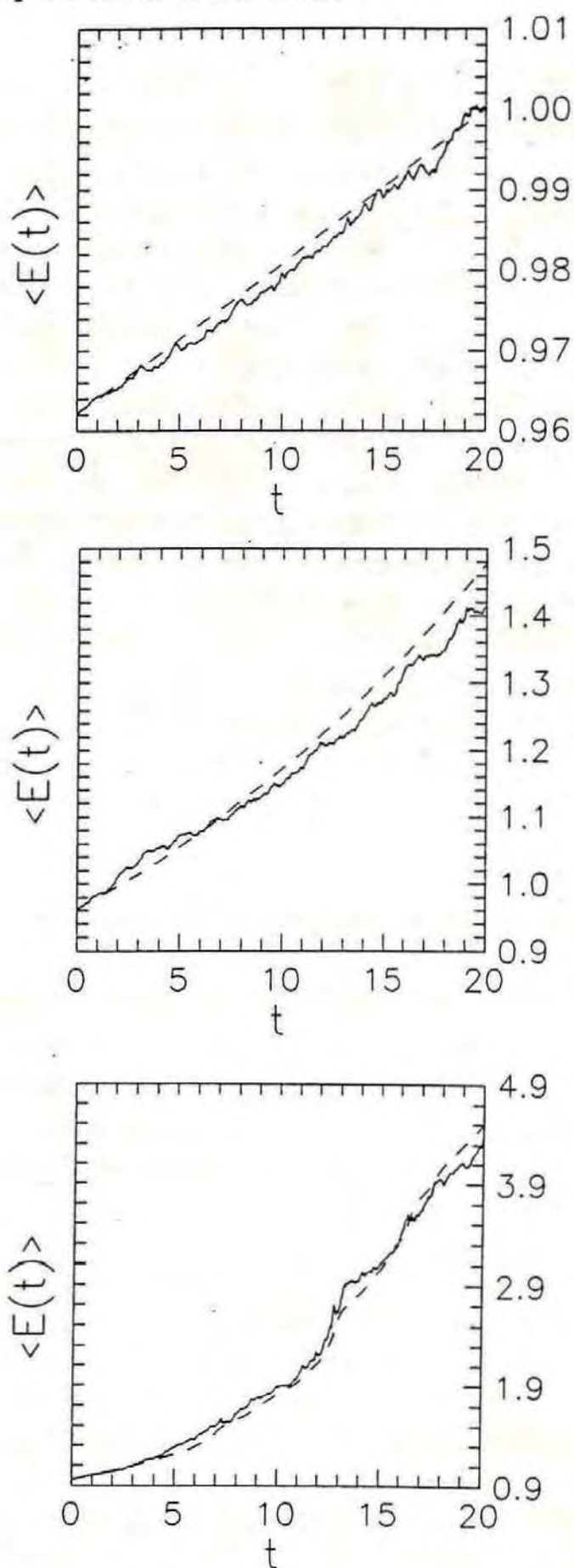


Figura 3.5: Comprobación de la ecuación PMR

Creo que el hecho de que las simulaciones pasen tan bien esta prueba no es una prueba rigurosa de su validez. Lo que sí se puede afirmar es que al menos es una notable propiedad de consistencia: el esquema discreto verifica un análogo de las propiedades del sistema estocástico continuo subyacente. Al igual que el carácter conservativo del método SV es la base para probar su convergencia y estabilidad, podría ocurrir que el cumplimiento de la ecuación PMR fuera la vía para demostrar lo mismo acerca del esquema SV estocástico, cosa que yo no he podido llevar a cabo y que queda como una muy interesante cuestión abierta. De cualquier manera, las comprobaciones que he realizado, es decir, la invariancia en la práctica de los promedios con distintos números de realizaciones, y la existencia del análogo discreto de la ecuación (3.24), parecen suficientes para establecer firmemente la validez de las simulaciones que presento. Más aún, si se añade el acuerdo con las predicciones perturbativas en un rango de intensidad del ruido, puedo decir que tengo buenas razones para creer en la fiabilidad de mi procedimiento para el estudio numérico del modelo ϕ^4 . Una última observación al respecto es que el método es inmediatamente generalizable a cualquier otra ecuación NKG, y tal vez generalizable a cualquier problema no lineal para el que se conozcan esquemas conservativos, como NLS, por ejemplo (Jiménez, 1990).

3.4 Solitones libres en medio infinito

En esta sección recojo los resultados de las simulaciones numéricas cuando el *kink* se propaga en un medio todo él sometido a la perturbación estocástica y en ausencia de fricción. Después de comparar con las predicciones perturbativas de la sección 3.2, me ha parecido conveniente dividir ésta en dos partes: una dedicada a ruido débil, valores en torno a $2D \sim 0.01$ o menores, y a continuación otra de ruido fuerte, $2D \sim 0.1$ o por encima. Una observación que es necesario hacer es que, en principio, se puede pensar en un gran número de posibles cantidades “medibles” en las simulaciones, ya que el sistema tiene un número infinito de grados de libertad. De ellas, he escogido seguir, por supuesto, el perfil medio del *kink* y de la densidad de energía, y, además de ellas, las coordenadas colectivas del *kink* —mientras subsisten como cantidades significativas para describir el movimiento, o sea, mientras el *kink* no es seriamente distorsionado o incluso destruido—. Por último, como siempre tenía en mente la comprobación de la ecuación PMR, también he seguido en detalle la evolución de la energía total del sistema. Para cuantificar, al menos aproximadamente, el acuerdo entre las prediccio-

$2D$	V_0	Energía		Exponente Reescalado	Dispersión	
		$\xi \equiv t_e^{-1}$	E_0		δ	σ_0
1.0×10^{-3}	0.00	1.678×10^{-4}	0.9432	0.1678	—†	—†
	0.05	1.885×10^{-4}	0.9438	0.1885	1.212	3.718×10^{-7}
	0.10	2.299×10^{-4}	0.9475	0.2299	1.023	2.396×10^{-6}
	0.20	1.953×10^{-4}	0.9621	0.1953	1.165	6.564×10^{-6}
5.0×10^{-3}	0.20	1.059×10^{-3}	0.9615	0.2118	1.161	3.770×10^{-5}
1.0×10^{-2}	0.00	1.741×10^{-3}	0.9468	0.1741	—†	—†
	0.05	2.547×10^{-3}	0.9418	0.2547	1.534	2.746×10^{-6}
	0.10	2.143×10^{-3}	0.9458	0.2143	1.087	2.410×10^{-5}
	0.20	1.932×10^{-3}	0.9611	0.1932	1.144	7.389×10^{-5}
2.4×10^{-2}	0.20	4.606×10^{-3}	0.9663	0.1842	1.483	1.169×10^{-4}
5.0×10^{-2}	0.20	1.042×10^{-2}	0.9599	0.2084	1.880	2.179×10^{-4}
1.0×10^{-1}	0.00	1.936×10^{-2}	0.9596	0.1936	—†	—†
	0.025	1.462×10^{-2}	0.9601	0.1462	1.757	1.144×10^{-5}
	0.05	1.718×10^{-2}	0.9387	0.1718	2.380	1.815×10^{-5}
	0.10	2.436×10^{-2}	0.9278	0.2436	2.065	1.080×10^{-4}
	0.20	1.883×10^{-2}	0.9656	0.1883	—†	—†
	0.50	1.845×10^{-2}	1.0711	0.1845	1.975	1.527×10^{-3}
	0.80	7.704×10^{-3}	1.5651	0.0770	1.446	1.364×10^{-3}
	0.99	3.790×10^{-4}	6.6438	0.0038	1.161	7.845×10^{-6}
	0.20	8.327×10^{-2}	0.8617	0.3331	2.213	1.368×10^{-3}

† El centro del *kink* se mantuvo en reposo con un error de 10^{-11} , y por tanto los resultados de dispersión no eran significativos.

‡ Datos no disponibles.

Tabla 3.1: Parámetros característicos del comportamiento del *kink* de acuerdo a las simulaciones. Todas las entradas se definen en el texto. El *exponente reescalado* es el exponente de la energía t_e^{-1} dividido por la intensidad del ruido, una cantidad que resulta estar en torno a 0.2 excepto para *kinks* relativistas.

nes de la aproximación adiabática y simulaciones, ajusté leyes de potencia a las dispersiones obtenidas numéricamente, de la forma $\sigma_z(t) \sim \sigma_0 t^\delta$ —la predicción para $z(t)$ en ausencia de disipación es movimiento uniforme y se puede verificar directamente—. Por lo que respecta a la energía, descubrí que la forma funcional más adecuada para ajustar su evolución era una exponencial, $E(t) \sim E_0 \exp(t/t_e)$. Este comportamiento no se puede predecir *a priori* ni siquiera teniendo en cuenta la ecuación PMR, que sólo asegura que la energía crece. Estos ajustes se resumen en la tabla 3.1, y los comento con todo detalle a continuación.

3.4.1 Régimen de ruido débil

Evidentemente, y como se desprende de los párrafos precedentes, llamo *régimen de ruido débil* a aquél en que se verifican las predicciones perturbativas, tanto sobre la ausencia de radiación como sobre la evolución de las coordenadas colectivas. Lo que he encontrado es que este régimen realmente existe, es decir, las predicciones perturbativas son significativas físicamente; más aún, el umbral que lo define es bastante alto: ruidos en torno o inferiores a $2D \sim 0.01$ son débiles. He hecho simulaciones sobre todo con dos valores, $2D = 0.001$ y $2D = 0.01$. En el primer caso, los efectos de la perturbación resultaron ser demasiado pequeños como para causar efectos visibles en los solitones, que se propagan a través de la zona perturbada como *kinks* usuales de ϕ^4 no perturbado, sin mostrar apenas diferencias ni en la forma ni en la densidad de energía. Sin embargo, la dispersión del centro exhibe la marca del ruido, como puede verse en los exponentes que aparecen en la tabla 3.1, aunque, como el prefactor σ_0 es mucho menor que la unidad, este comportamiento tiene poca relevancia física, y casi todo ocurre como si no hubiera ruido. El centro evoluciona en media como el de un *kink* sin perturbar, y la energía es prácticamente constante, pudiendo apreciarse un muy leve incremento ajustable por una exponencial —ver tabla—.

Todas estas características están presentes de forma mucho más apreciable en las simulaciones con $2D \sim 0.01$, valor para el que las figuras 3.6 y 3.7 presentan un ejemplo de resultados típicos — $v_0 = 0.1$, $z_0 = -1$, $\alpha = 0$ —. En la primera, Fig. 3.6, represento la forma del solitón y la de su densidad de energía en tres instantes distintos de su evolución, $t = 1, 10, 20$. Se aprecia que el *kink* no es excesivamente alterado por el ruido y su forma se mantiene, lo que equivale a la verificación de la hipótesis adiabática de ausencia de radiación. Análogamente, su energía no se dispersa, sino que se mantiene localizada. En cuanto a las coordenadas colectivas, se pueden ver en la figura 3.7. El centro sigue una línea recta con velocidad casi constante y la dispersión crece más o menos como t en buen acuerdo con la Ec. (3.15) —predicción, línea de trazo corto, $\sigma_z^2(t) = 2.475 \times 10^{-5}t$; ajuste, línea de trazo largo, $\sigma_z^2(t) = 2.30 \times 10^{-5}t^{1.107}$ —. Finalmente, con respecto a la energía, la predicción PMR se cumple una vez más, y el crecimiento es exponencial —ajuste, $E(t) = 0.9458 \exp(0.00214t)$ —. La conclusión que se debe extraer de todo ello es que el formalismo adiabático es una buena descripción de la dinámica de los *kinks* en este régimen, que, eso sí, no tiene un límite claro o un valor crítico, sino que hay una transición más bien suave al régimen fuerte en una zona que depende de la velocidad inicial del *kink*,

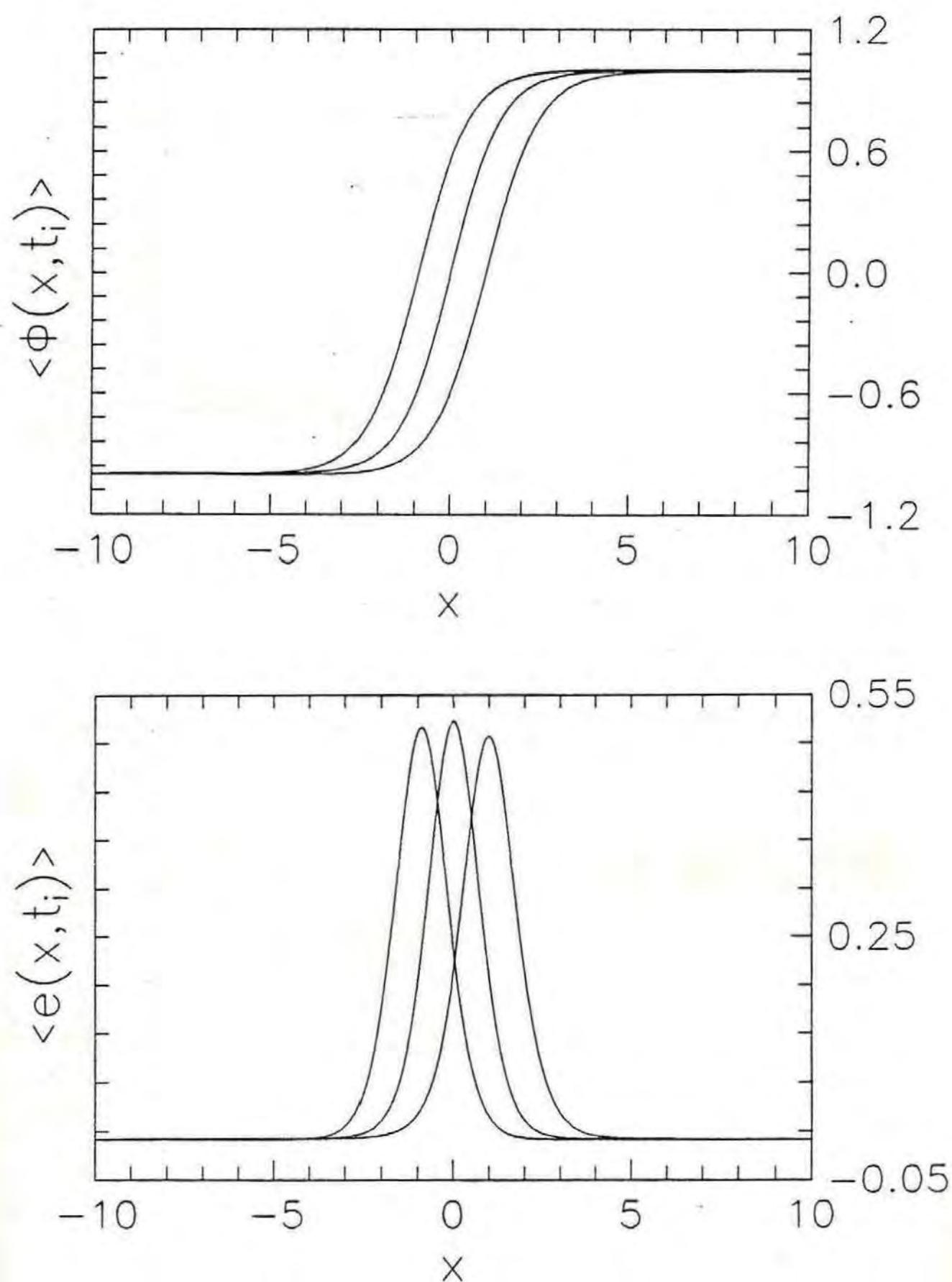


Figura 3.6: Régimen de ruido débil. Perfiles

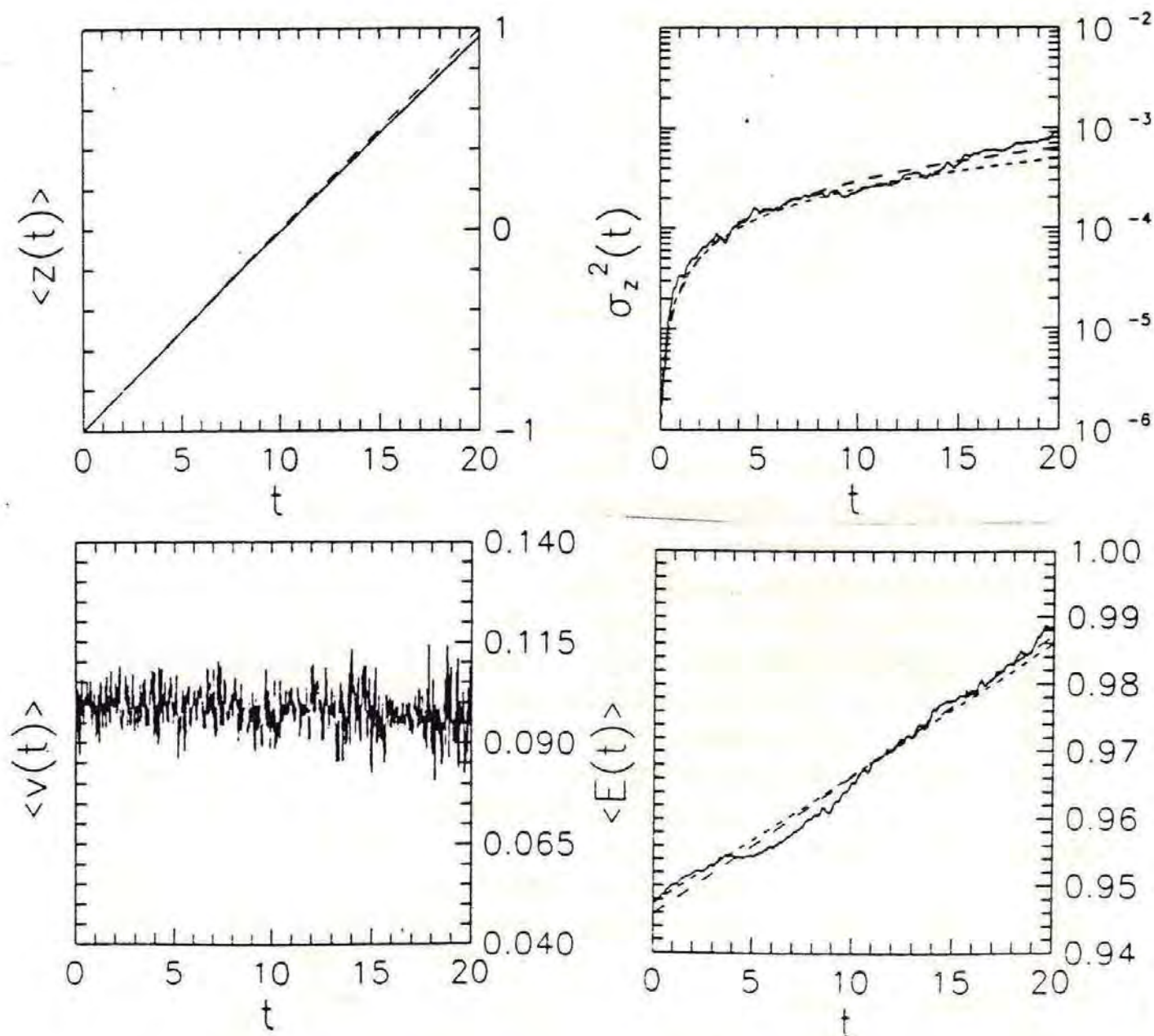


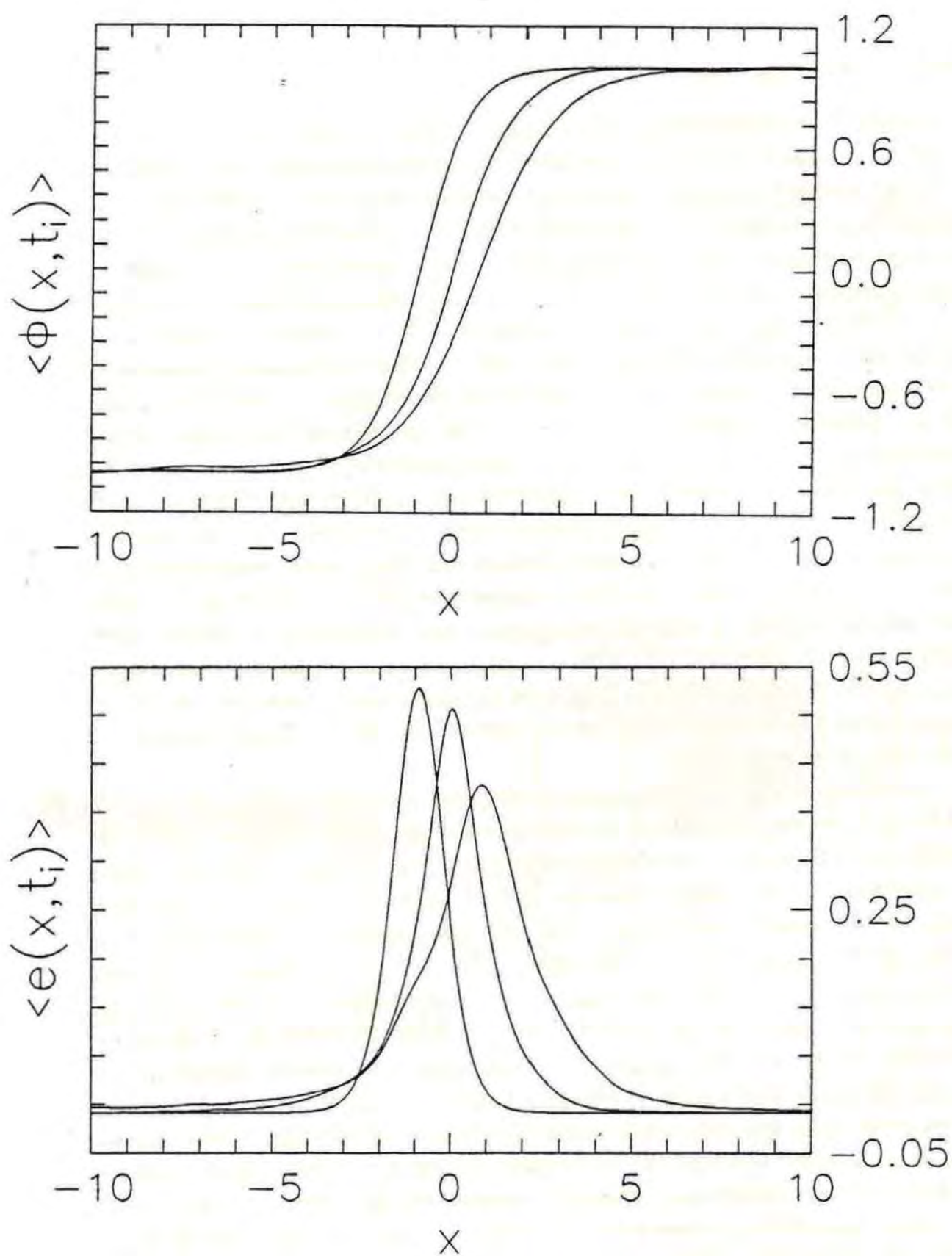
Figura 3.7: Régimen de ruido débil. Coordenadas colectivas

como describiré enseguida.

3.4.2 Régimen de ruido fuerte

Discutiré a continuación lo que sucede cuando se eleva la intensidad del ruido a valores de $2D = 0.1$. He estudiado minuciosamente esta intensidad concreta porque es la que posee las características más interesantes. En primer lugar, hablaré de lo que ocurre cuando el *kink* inicial es lento, como el de la simulación de las figuras 3.8 y 3.9 —igual que el de las figuras anteriores pero con $2D = 0.1$ —. La predicción adiabática deja de ser válida, y la razón aparece muy clara en la figura 3.8. El solitón, forzado por el ruido, está emitiendo radiación o fonones —a veces se les llama *mesones* en una jerga más próxima a la de las teorías de campos—, sobre todo hacia atrás. Además, se aprecia una contribución importante del modo interno, que describiré con más detalle en el capítulo siguiente, y que es el responsable de la distorsión de la estructura del *kink*. Lo que está ocurriendo se puede explicar de la forma siguiente: obsérvese que, al comienzo de la simulación, el ruido sólo va a afectar a la estructura del *kink*, como ya discutí en la introducción de este capítulo. Por consiguiente, sólo las partículas —puntos del mallado espacial, equivalentemente— que pertenecen a ella se verán sometidas a la perturbación. Una vez que el solitón ha pasado sobre ellas, permanecen excitadas debido a que ya no están en el fondo de uno de los pozos por lo que el ruido mantiene esa excitación, constituyendo la radiación que se ve en la figura 3.8.

Las coordenadas colectivas que se obtienen de la simulación, al no cumplirse la hipótesis adiabática, no siguen las leyes que se derivan de ella. El centro se ve frenado, y no alcanza la posición que debería si se cumplieran dichas leyes. La dispersión, después de un transitorio inicial en el que crece más o menos como t , pasa a una evolución más rápida —predicción, $\sigma_z^2(t) = 2.45 \times 10^{-4}t$; ajuste, $\sigma_z^2(t) = 1.03 \times 10^{-4}t^{2.087}$ —. El comportamiento exponencial de la energía viene caracterizado por un exponente un orden de magnitud más alto que en el caso previo —ajuste, $E(t) = 0.92781 \exp(0.0244t)$ —. También su distribución espacial se ve alterada, y he podido comprobar en las simulaciones que la energía que está fluyendo de la estructura hacia fuera es superior a la que está inyectando el ruido en el sistema, redistribución que parece tener que ver con el frenado del solitón. Debo añadir que los *kinks* en reposo siguen una misma evolución, excepto por el hecho de que el campo estocástico ϕ permanece simétrico en torno al centro del *kink* y la radiación va en ambas direcciones por igual, lo que es razonable puesto que

Figura 3.8: *Kink* lento en ruido fuerte. Perfiles

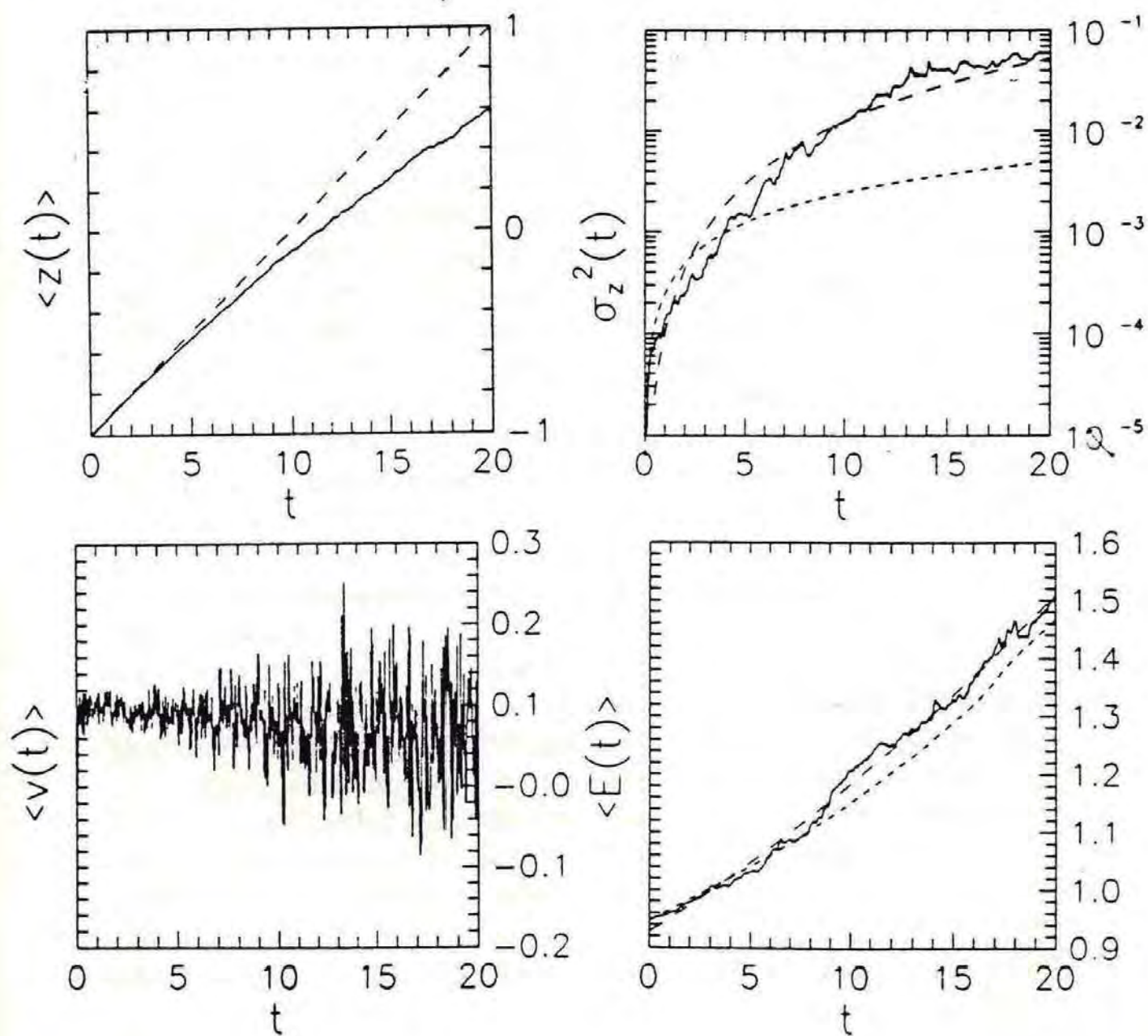


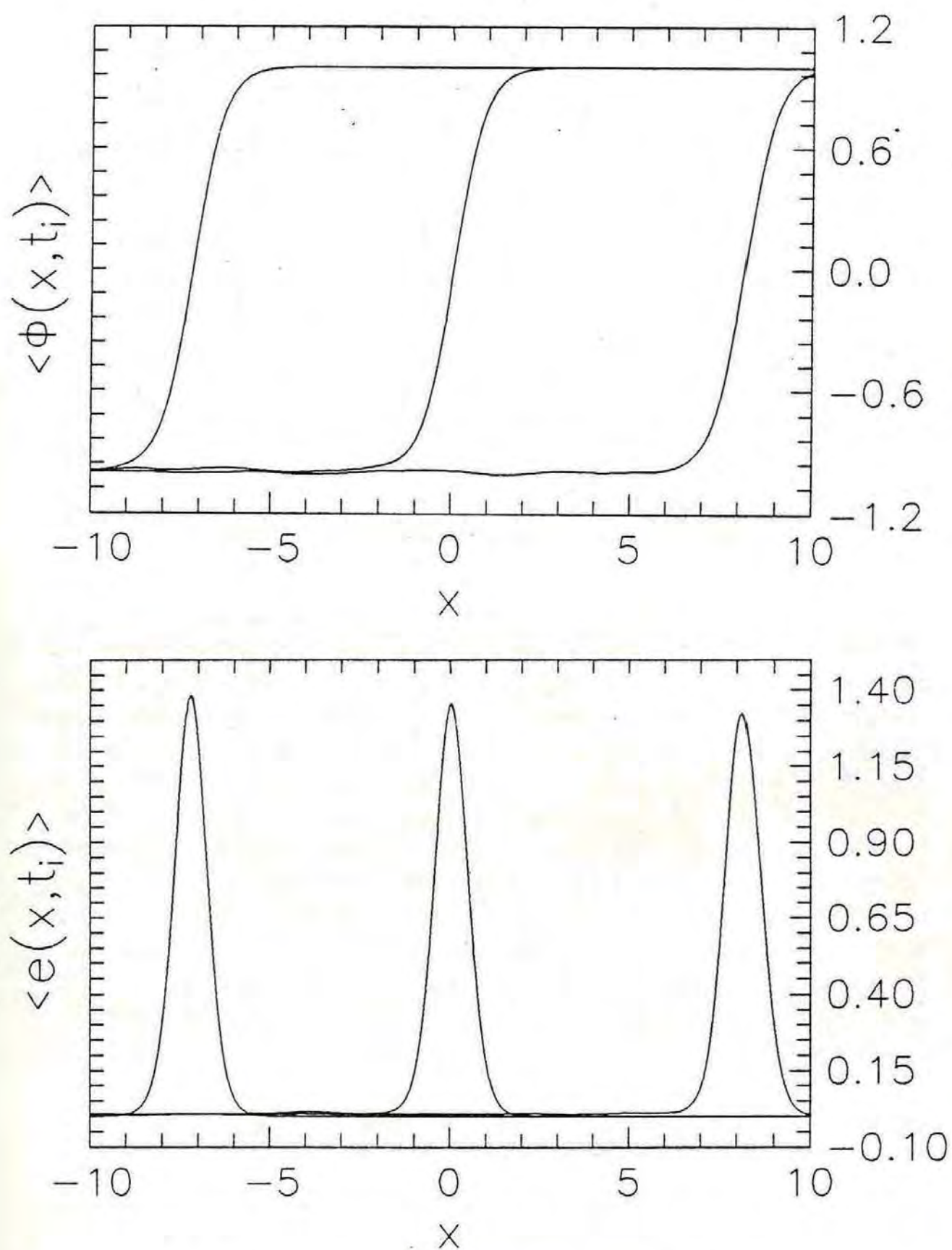
Figura 3.9: *Kink* lento en ruido fuerte. Coordenadas colectivas

si el solitón está parado no hay nada que privilegie una dirección respecto a la otra.

Empero, también he podido observar que la importancia de estos efectos y el alejamiento de las predicciones adiabáticas se hace menos y menos importante a medida que crece la velocidad inicial del *kink*. Las figuras 3.10 y 3.11 son un ejemplo. *Grosso modo*, se ve que esta simulación es claramente más parecida a la de ruido débil —figuras 3.6 y 3.7— que a la que acabo de describir ahora mismo —figuras 3.8 y 3.9—. En este caso los parámetros eran $v_0 = 0.8$ y $z_0 = -8$; para la dispersión, la predicción era $\sigma_z^2(t) = 5.76 \times 10^{-3}t$ mientras que el ajuste es $\sigma_z^2(t) = 9.854 \times 10^{-4}t^{1.596}$, y la energía se comporta como $E(t) = 1.5651 \exp(0.0077t)$. *Kinks* más rápidos o ultrarrelativistas acusan ésto aún más apreciablemente, como se advierte en las entradas correspondientes en la tabla 3.1. Me veo forzado, pues, a concluir que la validez de las coordenadas colectivas como tratamiento analítico aproximado del problema depende no sólo de la intensidad del ruido sino de la velocidad inicial del *kink*. Esto no debe confundirse con la dependencia en $\sigma_z^2(t)$ en v_0 sobre la que ya he hablado; por el contrario, está relacionado con la potencia radiada por el solitón, como mostraré en el capítulo siguiente. Como los *kinks* relativistas radian mucho menos que los lentos, la aproximación adiabática permanece válida para ruidos más fuertes.

De seguir incrementando la intensidad de la perturbación, se alcanza un *blow up* —los valores del campo ϕ se hacen infinitos, numéricamente, se producen *overflows*— intrínseco, es decir, no debido al esquema numérico, antes del tiempo final de las simulaciones, $t = 20$. La estructura del solitón resiste por un tiempo, pero finalmente algunas partículas llegan a estar demasiado cercanas y son en consecuencia repelidas por su acoplamiento armónico. Estos y otros procesos catastróficos similares conducen a la destrucción final del solitón y de la misma estructura del sistema. Es muy notable el que la energía crece de forma moderadamente rápida hasta que alcanza un valor del orden de dos o tres veces el inicial, momento en el que el crecimiento se acelera de forma repentina —manteniendo siempre la consistencia con la ecuación PMR— hasta el *blow up* final. Todo ello se ve muy bien en la figura 3.12 — $v_0 = 0.2$, $2D = 0.5$, $\alpha = 0$ —. Esta transición podría estar relacionada con la presencia en la cadena de energía suficiente para crear un nuevo par *kink-antikink* que aceleraría la inestabilización del modelo.

Otro interesante resultado de las simulaciones tiene que ver con la estabilidad de los *kinks*. He encontrado que, si el ruido es “apagado”, por así decir, antes de que se alcance un punto de no retorno como el descrito en párrafo anterior, los solitones se reorganizan, emitiendo más radiación y

Figura 3.10: *Kink* rápido en ruido fuerte. Perfiles

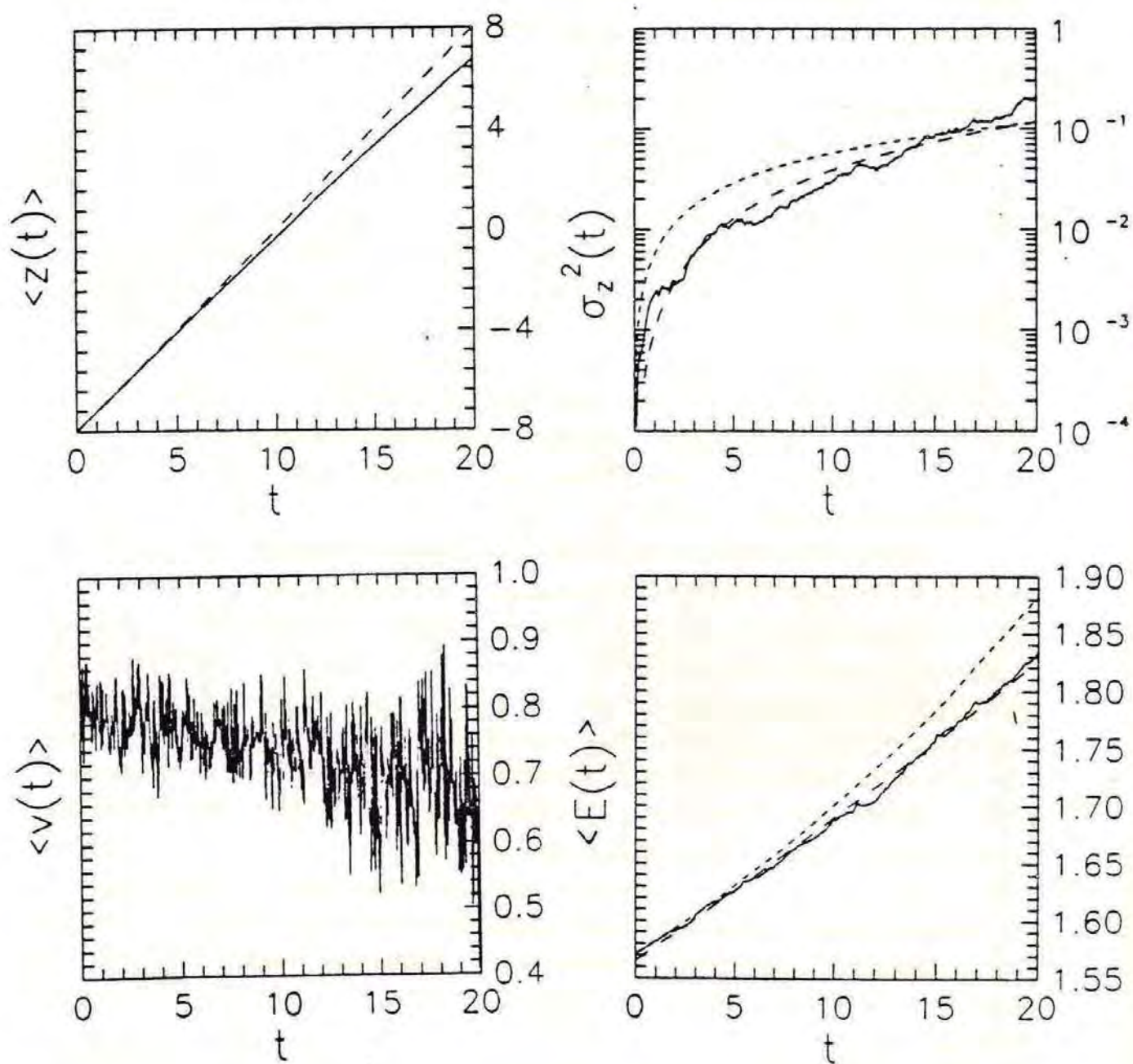


Figura 3.11: *Kink* rápido en ruido fuerte. Coordenadas colectivas

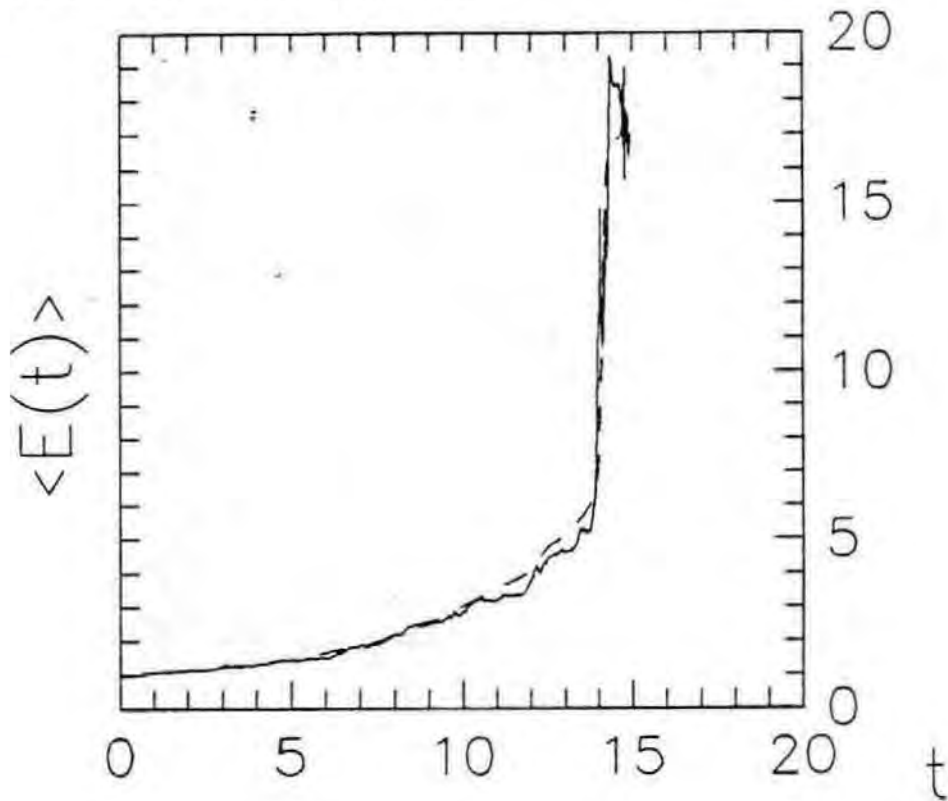


Figura 3.12: *Kink* en ruido muy fuerte. Energía

recobrando su estructura con un defasaje y una disminución de velocidad. Esto sucede incluso en situaciones en las que el *kink* ya está muy deformado debido a la excitación del modo interno y de fonones. El proceso de estabilización parece ocurrir vía disipación de la energía contenida en el modo interno a fonones, y la consiguiente propagación de estos lejos de la estructura. Más aún, los parámetros del nuevo *kink* son aquellos que tenía justo cuando la perturbación desaparece: su propagación comienza en el punto donde estaba el anterior, y con la velocidad que tenía. Con esta evidencia, puedo afirmar que los solitones son estables si la perturbación no actúa durante un tiempo excesivo, que depende de la intensidad de la misma. Aproximadamente, el tiempo de inestabilización cumple la relación $2Dt_{ins} \sim 10$.

Las principales conclusiones de esta sección se resumen, además de en la ya referida tabla 3.1, en las figuras 3.13 y 3.14. Empezaré por aquella, en la que represento la desviación de la predicción adiabática, que defino como

$$\delta x \equiv 100 \times \frac{\langle x_{adiab}(t=20) \rangle - \langle x_{num}(t=20) \rangle}{\langle x_{adiab}(t=20) \rangle} \quad (3.26)$$

frente a la intensidad del ruido. Para $2D = 1$ tomo en vez de $t = 20$ —el *kink* es destruido antes— el tiempo en que la energía es dos veces la inicial. Las barras de error son la desviación *standard* del conjunto de valores para un

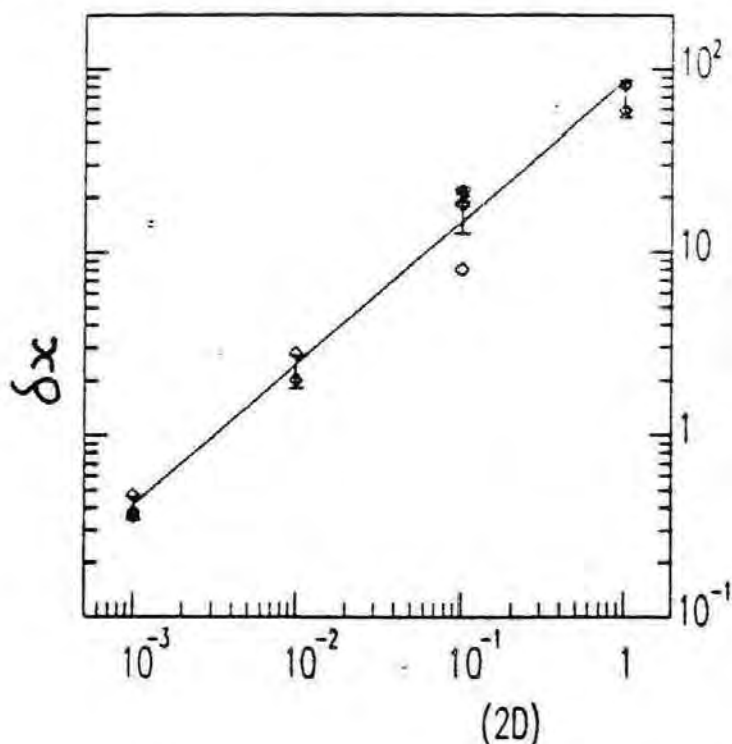


Figura 3.13: Desviación de la predicción adiabática

mismo ruido y distintas velocidades. Se ve que la desviación de la predicción es directamente proporcional a la intensidad del ruido —ajuste, línea sólida, $\delta x = 88.97(2D)^{0.78}$ —, variando de valores en torno al 1% cuando $2D = 0.001$ a otros cercanos al 100% para $2D = 1$. También la potencia de t con la que crece la dispersión crece con el ruido, como se ve en la tabla 3.1, y pasa de ser 1 a ser 2 para ruidos fuertes. Esto que se podría llamar “difusión anómala” se puede interpretar a la luz de lo arriba expuesto como un efecto de la estructura extensa del *kink* y la radiación a que da lugar. Cerraré esta sección central del capítulo con un último resultado: el exponente con el que crece la energía escala muy bien con la intensidad del ruido —ver figura 3.14; la línea de trazo ajusta todos los puntos y tiene una pendiente aproximada de 0.8, mientras que la solida ignora los ultrarrelativistas, círculos vacíos, y su pendiente es 1.022—. Esto debe estar relacionado con el fenómeno de resonancia del que hablaré en el próximo capítulo.

3.5 Medio infinito disipativo

Si el modelo ϕ^4 tiene algo que ver, aunque sea fenomenológicamente, con la realidad, debo considerar un aspecto presente en cualquier sistema físico, que no es otro que la disipación o fricción. Este fenómeno puede detener

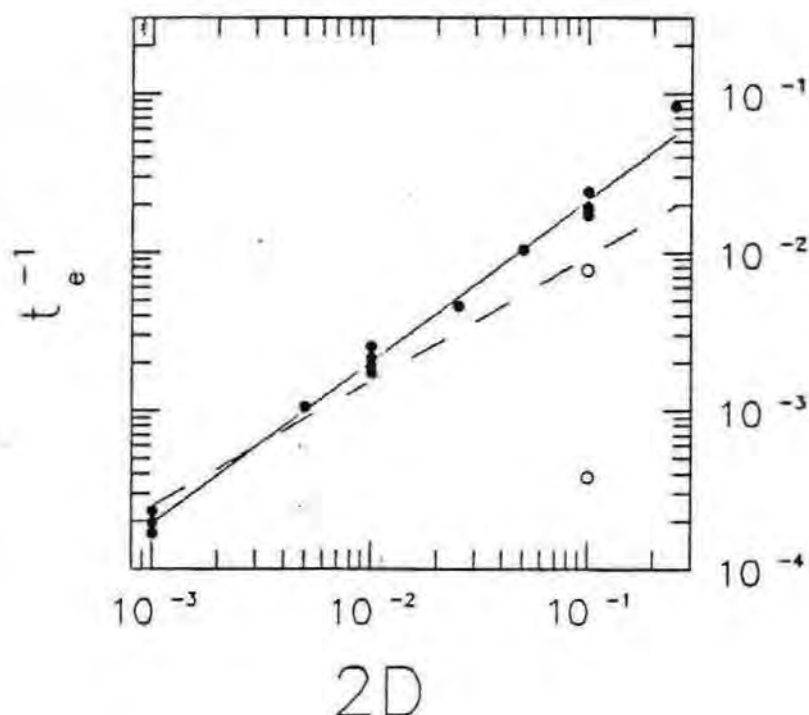
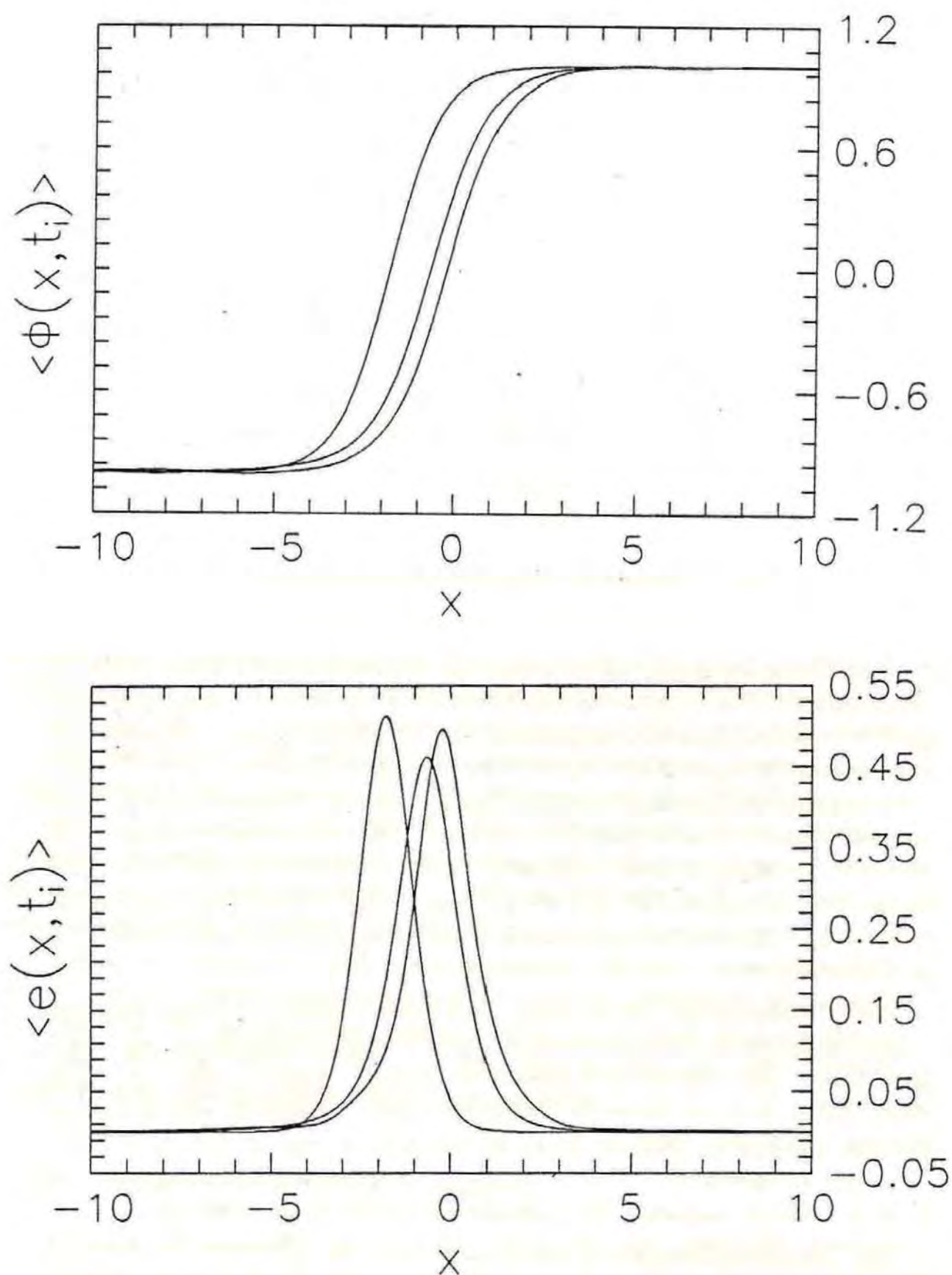
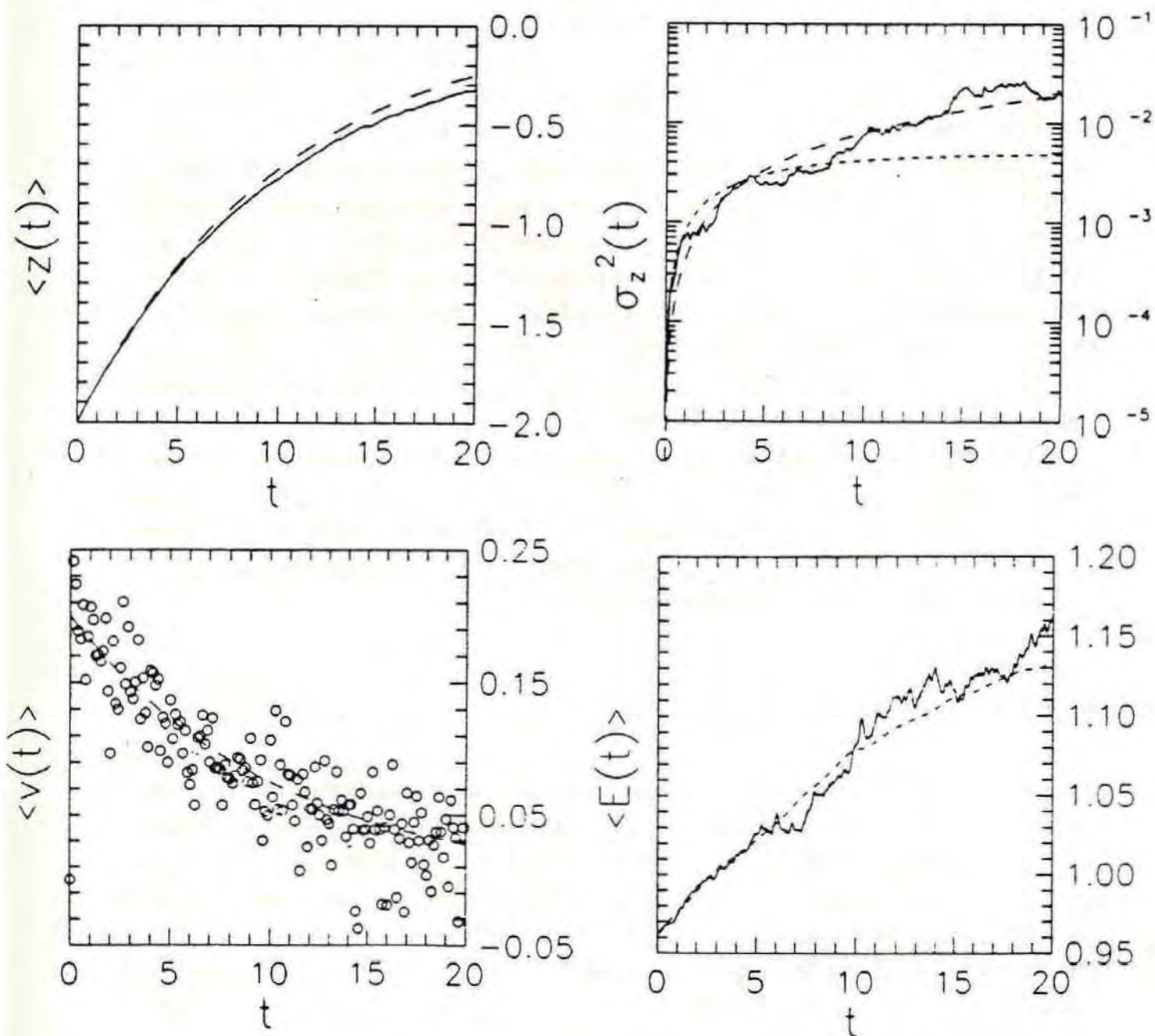


Figura 3.14: Exponente de la energía

o afectar la propagación de solitones, que de otra manera sería indefinida en el modelo ϕ^4 no perturbado, y proviene de diversas causas, siendo imposible su total anulación en general. Así, es preciso llevar a cabo también simulaciones incluyendo este tipo de contribución disipativa y ver qué nuevas consecuencias origina en el modelo ϕ^4 estocástico perturbado. Esto es lo que me propongo en esta sección. Después de algunos experimentos para decidir un valor adecuado para el coeficiente de disipación α , tal que ni los *kinks* fueran detenidos demasiado pronto ni tampoco la fricción fuera inapreciable, elegí como valor *standard* $\alpha = 0.1$, y repetí el programa de simulaciones de la sección anterior.

Los resultados que he obtenido se pueden resumir en pocas palabras: cuando la disipación está presente, las predicciones perturbativas son válidas para ruidos más fuertes que cuando no lo está. Bajo un ruido de intensidad $2D = 0.1$, los *kinks* se comportan muy de acuerdo con la aproximación adiabática, como se ve en la figura 3.15 — $v_0 = 0.2$, $z_0 = -2$ —, en la que se aprecia un excelente acuerdo analítico-numérico. Acuerdo que abarca todos los aspectos de la simulación, desde la ausencia de radiación —hipótesis adiabática una vez más— hasta el decrecimiento de la velocidad, que se ve en la figura 3.16, en la que no uno los puntos para poder ver la aproximación teórica. La predicción para la dispersión ya no es tan

Figura 3.15: *Kink* en medio disipativo. Perfiles

Figura 3.16: *Kink* en medio disipativo. Coordenadas colectivas

sencilla en su expresión, pero sí aparece en la gráfica; en cuanto al ajuste, resulta ser $\sigma_z^2(t) = 4.43 \times 10^{-3} t^{1.258}$, más cercano a los valores de los ruidos débiles no disipativos que de los fuertes. En cuanto a la energía, verifica la ecuación PMR pero ahora su crecimiento ya no es exponencial, como consecuencia del balance que se establece entre la inyección de energía del ruido y su disipación por fricción, tendiendo a un valor final constante. Trataré este comportamiento de la energía en el caso disipativo en el siguiente capítulo: allí mostraré que existe un umbral para la excitación paramétrica de los modos lineales en el sistema disipativo estocástico cuando el ruido es pequeño. Por otra parte, de las simulaciones se deduce un efecto parecido cuando el ruido es grande, que conduce a un decrecimiento de la potencia radiada y por tanto a un mejor cumplimiento de la hipótesis adiabática. Quiero insistir en que aparte de estas consideraciones sobre la energía y el frenado disipativo, todo sucede como en la situación libre con ruido débil y lo allí discutido se aplica de forma prácticamente literal aquí. Es razonable suponer que el *kink* es por fin detenido y luego sigue el mismo proceso que uno en medio no disipativo, excepto porque ahora el coeficiente α , no nulo, limita la generación de radiación. Todas mis simulaciones apoyan la idea de que la disipación es un factor suavizador del efecto del ruido, de tal forma que la cadena tiende a un estado de equilibrio, con los solitones parados y un flujo continuo y constante de radiación.

3.6 Medios finitos. Fronteras

Otro factor, el último que voy a estudiar en este capítulo y que le sirve de conclusión, que debe incluirse para dar mayor contenido físico al modelo ϕ^4 estocástico es permitir que el ruido afecte tan solo a una zona finita del modelo, o, equivalente, permitir que existan fronteras entre zonas perturbadas y no perturbadas, cosa que hasta ahora estaba ignorando. La situación que he estudiado corresponde a un solitón, en un medio inicialmente sin perturbar, sobre el que de pronto comienza a ejercer su acción la perturbación estocástica afectando a todo el sistema. Si esta última suposición se relaja, tiene entonces sentido preguntarse por la posibilidad de que los solitones puedan entrar en una región aleatoria de la cadena. Para afrontar esta cuestión, he llevado a cabo otro conjunto de simulaciones en las que sólo 200 partículas o puntos del mallado están sometidos a fluctuaciones del potencial, concretamente las situadas en el intervalo $[0, 10]$, con condición inicial dada por un *kink* con su estructura justo a punto de entrar en ese

intervalo —recuerdo que las alas no se ven afectadas y no distinguen zonas perturbadas de zonas normales—. Por lo demás, la ecuación PMR todavía se aplica, aunque en la forma ligeramente modificada

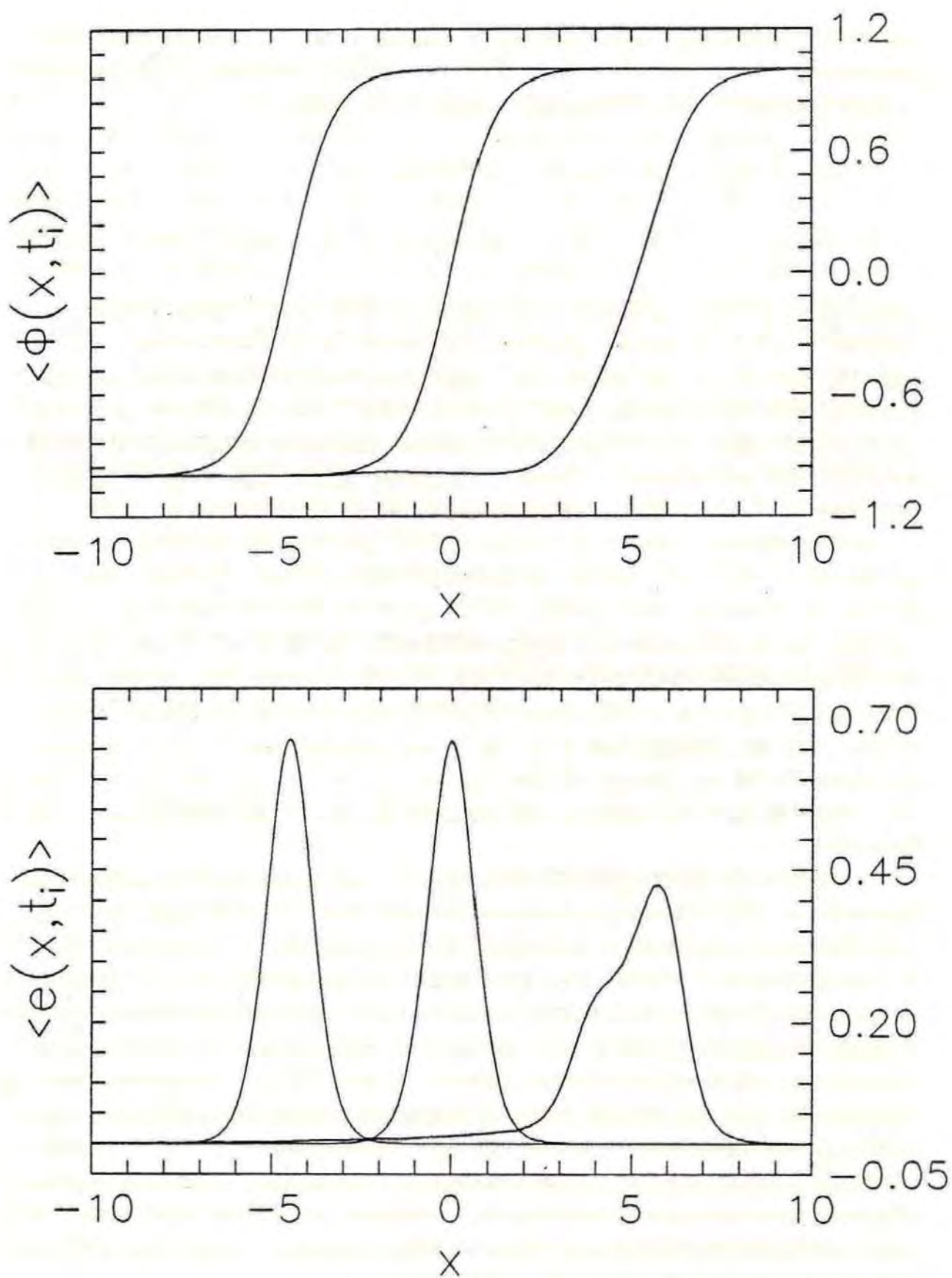
$$\begin{aligned} \frac{d \langle E \rangle}{dt} = & -\alpha \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle |\phi_t|^2 \rangle + \\ & + 2D \int_{-\infty}^{\infty} dx \chi_{[a,b]}(x) \langle (-\phi + \phi^3)^2 \rangle, \end{aligned} \quad (3.27)$$

siendo $[a, b]$ el intervalo sobre el que actúa el ruido, y $\chi_{[a,b]}$ la función característica de dicho intervalo, que vale uno dentro de él y cero fuera. Así las cosas, todavía dispongo del test de consistencia, que se verifica una vez más de forma muy aproximada —ver figuras 3.18 y 3.21—. En cambio, no tengo predicciones teóricas sobre lo que va a suceder porque la ruptura de simetría translacional que supone la frontera complica enormemente las ecuaciones adiabáticas, como veré en el capítulo siguiente —Ecs. (4.58) a (4.61)—.

Los resultados de las simulaciones indican que hay dos posibles comportamientos dependiendo de la velocidad inicial del *kink*. En una frase, se pueden clasificar diciendo que el solitón entra en la zona perturbada si su velocidad es lo bastante alta, comportándose a partir de ahí como si estuviera en medio infinito, y se queda atrapado en la frontera si es relativamente lento. Aquél caso ya ha sido descrito por completo en la sección correspondiente, y no me detengo más en él, salvo para señalar que lo ocurre aparece representado en un ejemplo en las figuras 3.17 y 3.18, en las que un *kink* con velocidad $v_0 = 0.5$ entra en una zona de ruido $2D = 0.1$, en ausencia de disipación.

La diferencia entre ambas situaciones se aprecia muy claramente en la figura 3.19. En ella, se ve la evolución temporal de la energía que hay contenida a la izquierda y a la derecha de la frontera. Cuando el *kink* es lento —figura 3.19.a—, una gran parte de su energía no es capaz de atravesar el principio de la región estocástica, y retrocede o se mantiene a la izquierda, mientras que para el *kink* rápido, todo el paquete localizado de energía cruza la frontera como un todo —figura 3.19.b—. Tengo que decir una vez más que este umbral no es un valor exacto sino una región, no muy ancha, de velocidades, y que además depende de la intensidad del ruido. Determinar exactamente la dependencia del umbral en el ruido sería posible sólo mediante una gran cantidad de tiempo de ordenador, que tampoco parece demasiado razonable invertir en este problema, puesto que se tiene ya una idea semi-cuantitativa de lo que sucede.

El aspecto nuevo del problema con fronteras es el *pinning* de los solitones

Figura 3.17: *Kink* rápido en medio finito. Perfiles

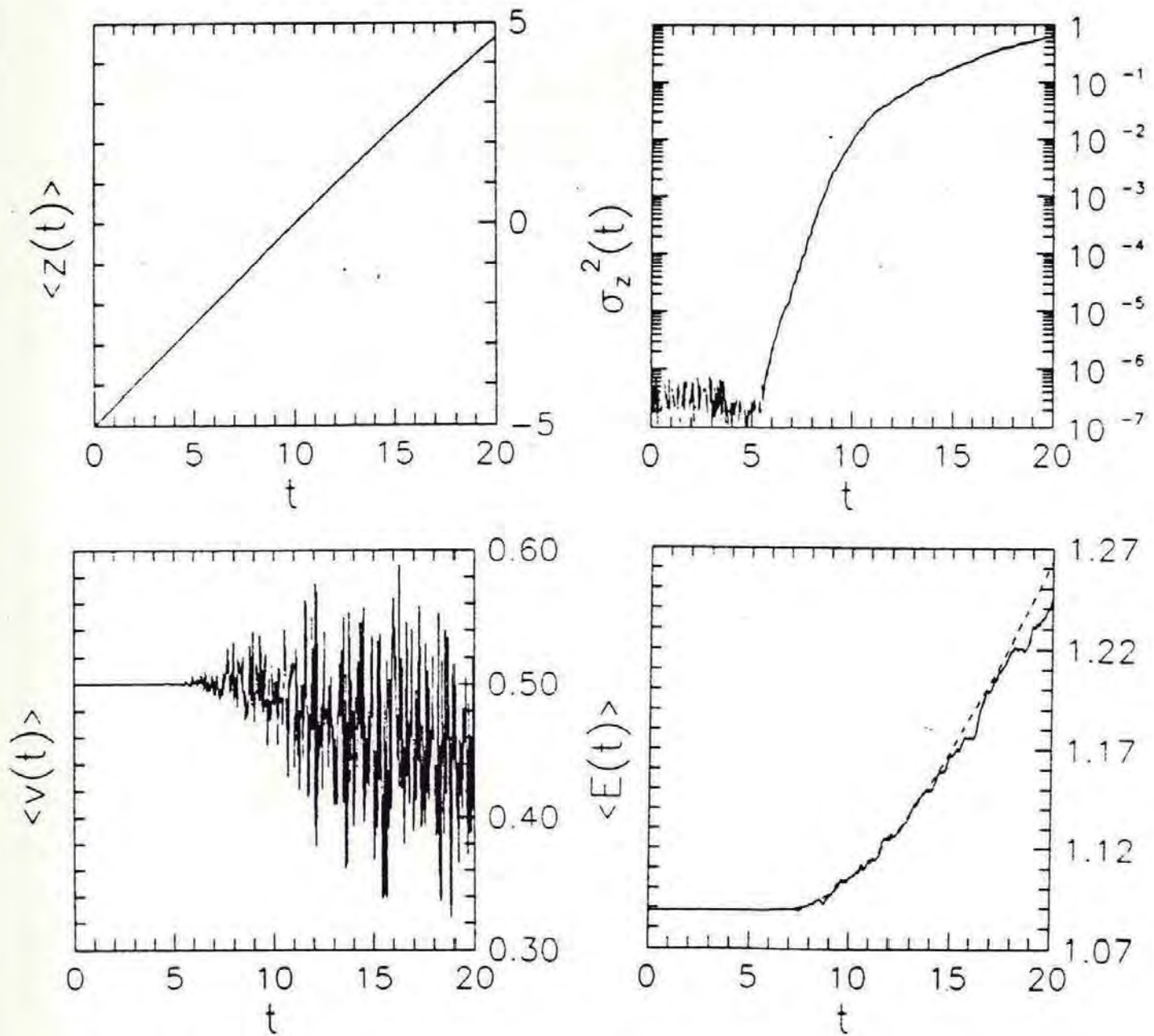


Figura 3.18: *Kink* rápido en medio finito. Coordenadas colectivas

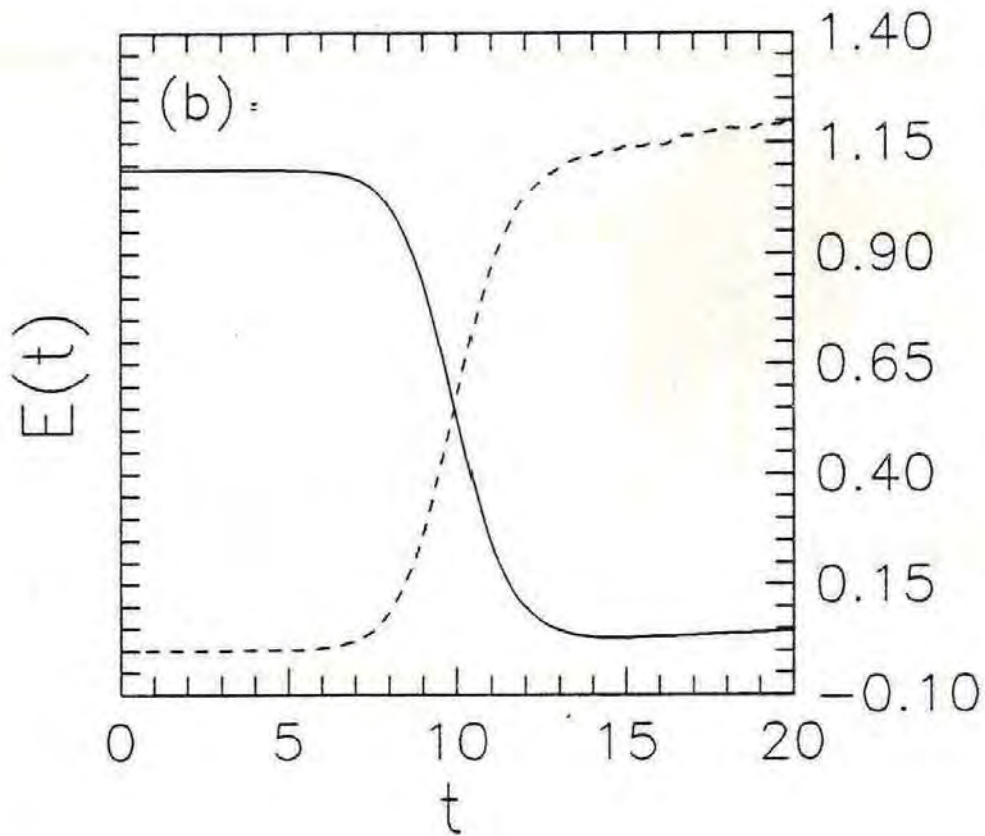
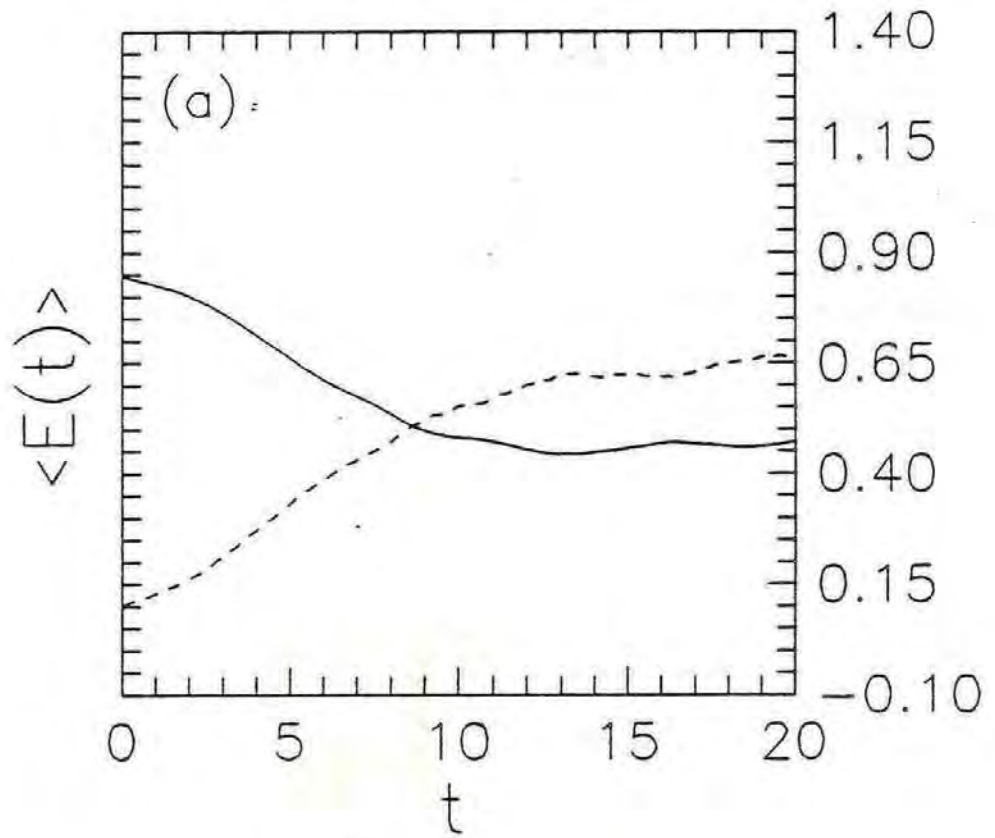
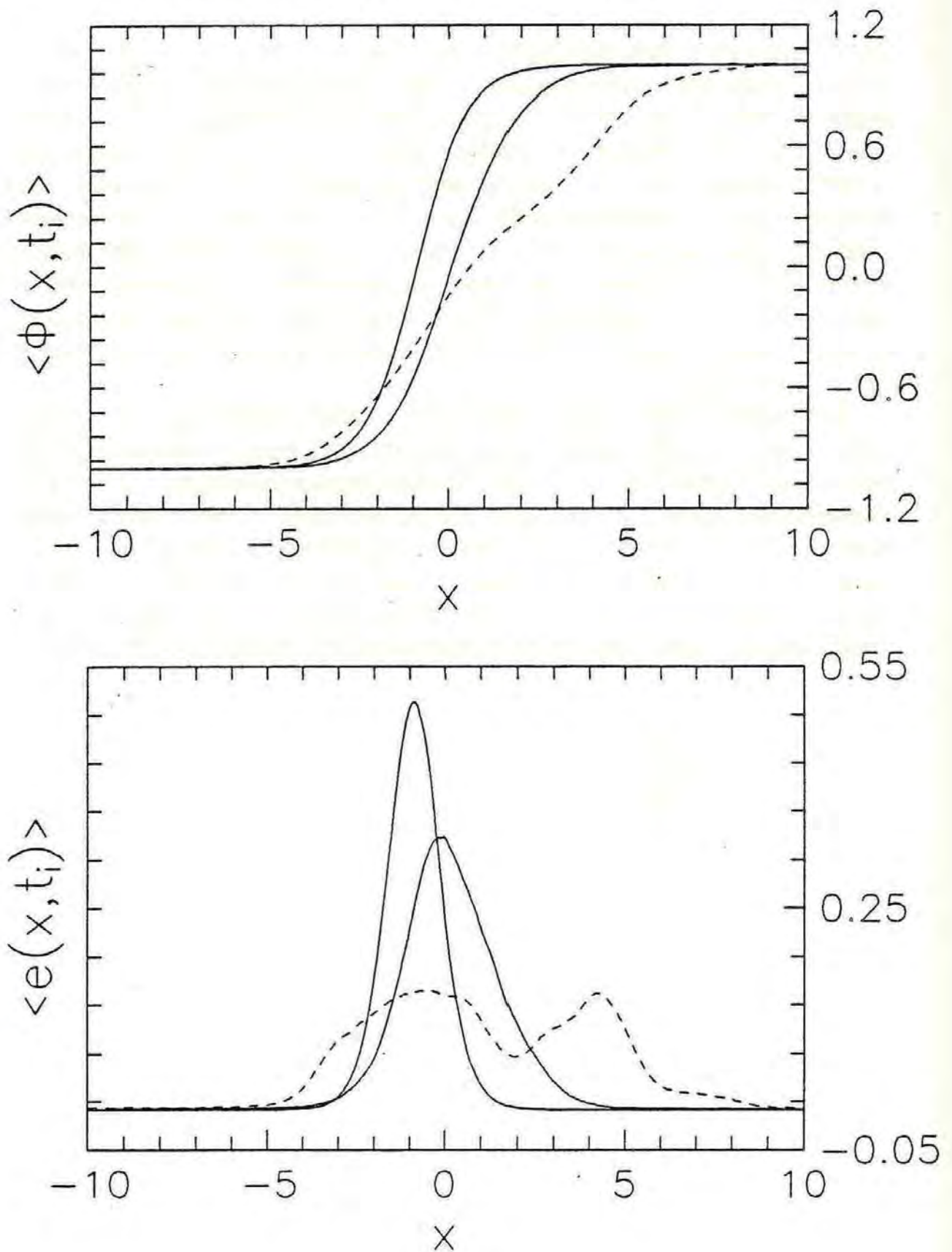
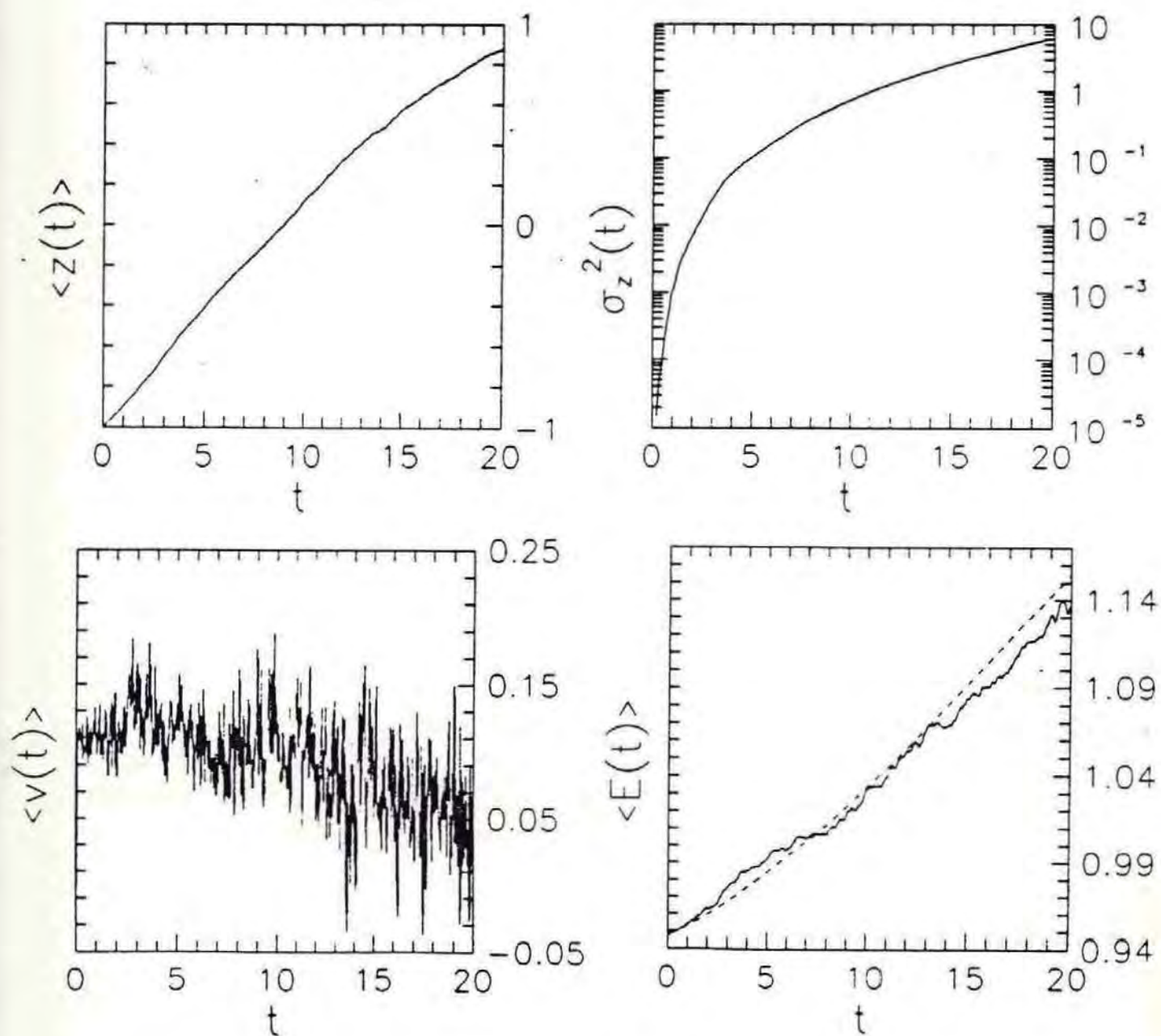


Figura 3.19: Distribución espacial de la energía.

lentos, como en el caso que aparece en las figuras 3.20 y 3.21 — $v_0 = 0.1$ —. A estas velocidades de incidencia, el *kink* es rápidamente atrapado en el límite de las dos regiones, y una gran parte de su energía, como acabo de señalar en el párrafo anterior, no llega a entrar en la zona perturbada, por lo que el solitón se ve incapacitado para propagarse. A continuación, esta energía empieza a reflejarse hacia atrás, pero no en forma de fonones sino como una deformación de toda la cadena —ver figura 3.20— debido a la acción del acoplo armónico que mantiene conectadas las partes del *kink* en una zona y otra. La configuración final parece ser bastante inestable, aunque de nuevo serían necesarias simulaciones mucho más largas para convencerse plenamente de ello.

Para acabar, unas breves líneas sobre el efecto combinado de disipación y fronteras. Cuando ambos están presentes, no sucede nada inesperado, sino lo que se puede deducir de toda la exposición precedente. El umbral de velocidad por debajo del cual los *kinks* son atrapados es disminuido, debido al frenado disipativo, pero por lo demás todo, *pinning* o propagación, sucede como ya he explicado, probablemente debido a que los modos de fonón, los más influenciados por su carácter cuasilineal por la fricción, no tienen probablemente nada que ver con el fenómeno de *pinning* por la frontera.

Figura 3.20: *Kink* lento en medio finito. Perfiles

Figura 3.21: *Kink* lento en medio finito. Coordenadas colectivas

El modelo ϕ^4 bajo fluctuaciones del potencial. Teoría

“— Es inútil que se pierda en discursos filosóficos para confesarme que no conoce la ley —dijo el profesor.

— Muy cierto —dijo Angel—, pero es necesario que meta estas reflexiones en algún sitio. Si es que se trata de reflexiones. Por mi parte, me inclinaría a considerarlas como simples reflejos de un individuo sano y susceptible de comprobación.”

Boris Vian, *El Otoño en Pekin*.

Como acabo de reseñar en el capítulo anterior, la dinámica de los *kinks* presenta dos regímenes distintos dependiendo de que el ruido sea débil o fuerte. Mi propósito ahora es también doble: por un lado, intentar construir una teoría de perturbaciones que nos permita describir más en detalle el régimen de ruido débil, extrayendo información que es difícil obtener de las simulaciones; por otro, explicar lo mejor posible los fenómenos nuevos que aparecen cuando la perturbación es fuerte y que no pueden ser predichos a través de la teoría perturbativa anterior.

4.1 Teoría general de perturbaciones seculares

En esta primera sección voy a desarrollar la teoría perturbativa que voy a aplicar al modelo ϕ^4 estocástico. En realidad, como el formalismo es bastante general, consideraré el problema

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \phi + \phi^3 = \varepsilon f(x, t) R[\phi], \quad (4.1)$$

dónde $f(x, t) = 0$ si $t < 0$; por lo demás, f puede ser cualquier función, R cualquier función o funcional de ϕ y ε es un parámetro pequeño —que en el

caso que me interesa será la intensidad del ruido, $\sqrt{2D}$ —. Para empezar, lo que voy a hacer es un típico *ansatz* perturbativo —ver, por ejemplo, Bass *et al.* (1988)—: buscaré soluciones de la forma

$$\phi(x, t) = \phi_0(x, t) + \varepsilon \phi_1(x, t) + \varepsilon^2 \phi_2(x, t) + \dots, \quad (4.2)$$

siendo ϕ_0 una solución exacta de la ecuación no perturbada —es decir, con $\varepsilon = 0$ —. Como el objeto de estudio es la dinámica de los *kinks*, elijo dicha solución como un *kink* con parámetros dependientes del tiempo (McLaughlin y Scott, 1978) de forma parecida a la del capítulo anterior, pero utilizando dos escalas distintas para las variables:

$$\phi_0(x, t) = \tanh \left(\frac{x - z(t, \tau)}{\sqrt{2[1 - v^2(\tau)]}} \right), \quad (4.3)$$

con

$$z(t, \tau) = x_0(\tau) + \int_0^t d\tau v(\tau), \quad (4.4)$$

y dónde he definido $\tau = \varepsilon t$ como una *variable lenta* para enfatizar que $dx_0/dt \sim dv/dt \sim \varepsilon$. La razón de esta elección es a la vez física y matemática. Físicamente, refleja el hecho de que la coordenadas colectivas del solitón pueden verse afectadas por la perturbación, pero, que de ser así, la dependencia en τ que asigno a estas funciones presupone que estos cambios en el movimiento del *kink* como un todo, si se producen, son mucho más lentos que la generación de radiación, que viene descrita por las sucesivas $\phi_i(x, t)$. Matemáticamente, aparecerá de forma evidente enseguida que necesito estas funciones libres para evitar términos seculares en el desarrollo perturbativo, siguiendo la técnica usual.

Prosiguiendo con el cálculo, un primer punto importante es dividir la ecuación de segundo orden en el tiempo (4.1) en dos de primer orden —de no recurrir a una función auxiliar ν el desarrollo resulta inaplicable—:

$$\phi_t(x, t) - \nu(x, t) = 0, \quad (4.5)$$

$$\nu_t(x, t) - \phi_{xx}(x, t) - \phi(x, t) + \phi^3(x, t) = \varepsilon f(x, t) R[\phi]. \quad (4.6)$$

Como es habitual, los subíndices indican derivadas respecto a la variable subindicada. La sustitución del *ansatz* de la Ec. (4.2), más uno similar para el campo auxiliar $\nu(x, t)$, en las ecuaciones (4.5) y (4.6) conduce a las ecuaciones para la primera aproximación, que resultan ser

$$\phi_{1,t} - \nu_1 = -\phi_{0,\tau}, \quad (4.7)$$

$$\nu_{1,t} - \phi_{1,xx} - \phi_1 + 3\phi_0^2\phi_1 = f(x, t) R[\phi_0] - \nu_{0,\tau}, \quad (4.8)$$

dónde por comodidad y claridad de la expresión he eliminado las dependencias explícitas en (x, t) . Aquí he de señalar que los términos en $\phi_{0,\tau}$ y $\nu_{0,\tau}$ vienen del hecho de que las derivadas respecto a τ son un orden superior en ε con respecto a las derivadas en t . De acuerdo con esto, t se considera constante cuando uno calcula derivadas respecto a τ —es decir, asumo que t y τ son independientes, técnica habitual del método multiescala (Morse y Feshbach, 1958)—, y se tiene

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial v}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial x_0}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial x}. \quad (4.9)$$

A continuación, reescribo (4.7) y (4.8) cambiando la variable espacial x para pasar al sistema de referencia en el que el *kink* está en reposo, o sea

$$(t, x) \mapsto \left(t, \zeta \equiv \frac{x - z(t)}{\sqrt{2(1 - v^2)}} \right), \quad (4.10)$$

con lo cual se llega a

$$\phi_{1,t} - \frac{v}{\sqrt{2(1 - v^2)}} \phi_{1,\zeta} - \nu_1 = -\phi_{0,\tau}, \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \nu_{1,t} - \frac{v}{\sqrt{2(1 - v^2)}} \nu_{1,\zeta} - \frac{1}{2(1 - v^2)} \phi_{1,\zeta\zeta} - \phi_1 + 3\phi_0^2(\zeta)\phi_1 = \\ = F(t, \zeta) R[\phi_0(\zeta)] - \nu_{0,\tau}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

dónde por $F(t, \zeta)$ indico $f(t, x = z(t) + \zeta\sqrt{2[1 - v^2]})$, y además todas las funciones que aparecen lo son de las variables (t, ζ) excepto dónde aparece explícitamente otra dependencia, como en $\phi_0(\zeta)$. Si ahora introduzco la transformada Fourier en la variable temporal, definida como

$$\tilde{\phi}(\omega, \zeta) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} \phi(t, \zeta). \quad (4.13)$$

y aplico esta transformación en las ecuaciones (4.11) y (4.12), puedo encontrar de la Ec. (4.11) una expresión para $\tilde{\nu}_1(\omega, \zeta)$ que sustituida en la Ec. (4.12) permite cerrarla para $\tilde{\phi}_1(\omega, \zeta)$:

$$-\frac{1}{2} \tilde{\phi}_{\zeta\zeta} - \frac{2i\omega v}{\sqrt{2(1 - v^2)}} \tilde{\phi}_{\zeta} - (1 + \omega^2) \tilde{\phi} + 3\phi_0^2(\zeta) \tilde{\phi} = \frac{1}{2} \tilde{\mathcal{F}}. \quad (4.14)$$

Nótese que, para simplificar la notación, omito los subíndices 1, en el bien entendido de que ahora en adelante ϕ es la corrección de primer orden buscada; por otra parte, he llamado

$$\tilde{\mathcal{F}}(\omega, \zeta) \equiv 2\tilde{F}(\omega, \zeta) R[\phi_0(\zeta)] - 2\tilde{\nu}_{0,\tau} - 2i\omega\tilde{\phi}_{0,\tau} + \frac{2v}{\sqrt{2(1-v^2)}}\tilde{\phi}_{0,\tau\zeta}. \quad (4.15)$$

Por último, elimino la primera derivada que aparece en la ecuación (4.14) mediante la siguiente propuesta para la forma de las soluciones:

$$\tilde{\phi}(\omega, \zeta) \equiv \psi_\omega(\zeta) \exp\left(-i\frac{\sqrt{2}\omega v}{\sqrt{(1-v^2)}}\zeta\right). \quad (4.16)$$

Sustituyéndola en la ecuación (4.14), y teniendo en cuenta que $\phi_0(\zeta) = \tanh \zeta$, encuentro

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi}{d\zeta^2} + \left(\frac{2\omega^2}{1-v^2} - 4 + \frac{6}{\cosh^2 \zeta}\right)\psi &= \\ = -\tilde{\mathcal{F}}(\omega, \zeta) \exp\left(i\frac{\sqrt{2}\omega v}{\sqrt{(1-v^2)}}\zeta\right) &\equiv \tilde{\Gamma}(\omega, \zeta), \end{aligned} \quad (4.17)$$

Así pues, la parte espacial de la primera corrección viene dada por la solución de un problema de tipo Schrödinger bien conocido (Morse y Feshbach, 1953; Krumhansl y Schrieffer, 1975; Flesch y Trullinger, 1987; Galindo y Pascual, 1989) para la familia de operadores

$$L_\omega \equiv \frac{d^2}{d\zeta^2} + E(\omega) + \frac{6}{\cosh^2(\zeta)}, \quad E(\omega) \equiv \frac{2\omega^2}{1-v^2} - 4. \quad (4.18)$$

El espectro de L_ω está formado por una parte discreta, con dos autovalores, que son $\lambda_0 = E(\omega) + 4$, $\lambda_1 = E(\omega) + 1$, cuyas autofunciones asociadas son

$$\psi_0(\zeta) = \sqrt{\frac{3}{4}} \frac{1}{\cosh^2(\zeta)}, \quad \psi_1(\zeta) = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\sinh(\zeta)}{\cosh^2(\zeta)}, \quad (4.19)$$

y por una parte continua, de autovalores $\lambda_k = E(\omega) - k^2$ y autofunciones

$$\psi_k(\zeta) = e^{ik\zeta} \frac{3 \tanh^2 \zeta - 3ik \tanh \zeta - (1+k^2)}{[2\pi(1+k^2)(4+k^2)]^{1/2}}. \quad (4.20)$$

Como estas funciones constituyen una base ortonormal del espacio de soluciones del problema (4.17), puedo escribir directamente una expresión para

la función $\psi(\zeta)$ que estoy intentando calcular. Esa expresión no es otra que

$$\psi_\omega(\zeta) = \frac{\gamma_0(\omega)\psi_0(\zeta)}{E(\omega) + 4} + \frac{\gamma_1(\omega)\psi_1(\zeta)}{E(\omega) + 1} + \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\gamma_k(\omega)\psi_k(\zeta)}{E(\omega) - k^2}, \quad (4.21)$$

dónde

$$\gamma_i(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \tilde{\Gamma}(\omega, \zeta) \psi_i^*(\zeta) \quad (4.22)$$

son los coeficientes de la descomposición ortonormal del término fuente $\tilde{\Gamma}(\omega, \zeta)$ —como siempre, el asterisco indica conjugación compleja—. La ecuación (4.21) es el resultado final del cálculo en la aproximación de primer orden. Lo que restaría por hacer es simplemente algebra, para calcular las integrales que aparecen en la Ec. (4.22). Una vez hecho esto, la primera corrección, en el sistema de referencia del *kink*, vendría dada por

$$\phi(t, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} \exp\left(-i \frac{\sqrt{2}\omega v}{\sqrt{1-v^2}}\right) \psi_\omega(\zeta). \quad (4.23)$$

Sin embargo, a pesar de que tal y como acabo de explicar el procedimiento, todo parece resuelto, no es así en absoluto desde el punto de vista del modelo ϕ^4 estocástico, porque hay un problema grave: oculto en la función $\tilde{\Gamma}(\omega, \zeta)$ a través de la sucesión de transformaciones

$$f(x, t) \xrightarrow{x \mapsto \zeta} F(t, \zeta) \xrightarrow{\text{FT}} \tilde{F}(\omega, \zeta) \xrightarrow{\text{def}} \tilde{\mathcal{F}}(\omega, \zeta) \xrightarrow{\text{def}} \tilde{\Gamma}(\omega, \zeta), \quad (4.24)$$

hay un proceso estocástico, $f(x, t) = \xi(t)$, y en consecuencia el cálculo de los coeficientes γ_0 , γ_1 y γ_k de manera explícita parece imposible. En la siguiente sección mostro que lo que no es imposible es obtener información útil de este formalismo pese a no poder trabajar con la expresión (4.23).

4.2 Los modos de excitación y sus contribuciones

En los capítulos precedentes he mencionado varias veces los *modos* de excitación que se dan en el sistema ϕ^4 , posponiendo la explicación de este concepto hasta este momento. Ahora, tras haber visto el formalismo anterior, sí está claro de qué estaba hablando: los modos de excitación —siendo preciso, que describen las excitaciones de pequeña amplitud del modelo ϕ^4 en torno a un *kink*— son las autofunciones dadas en las Ecs. (4.19) y (4.20), en función de las cuáles se puede descomponer cualquier desviación genérica de la forma del *kink*. Cada uno de estos modos tiene su significado físico —que

se puede ver con detalle en Fogel *et al.* (1977), en Bishop *et al.* (1980), o en Campbell *et al.* (1983), por ejemplo—. Así, el primero de ellos, el de autovvalor λ_0 , se suele denominar *modo cero*, *modo de traslación* o *modo Goldstone*—este último nombre viene de que el modo aparece *á la* Goldstone—, y está asociado simplemente a los desplazamientos del *kink* como un todo. Para darse cuenta, basta observar que la autofunción asociada no es más que la derivada del solitón, y que si ϕ tuviera sólo contribución de este modo la expresión perturbativa (4.2) se puede ver como un desarrollo Taylor de primer orden. El efecto del modo cero sería de esta forma trasladar el *kink* del punto x al $x + \varepsilon$. El modo correspondiente a λ_1 se llama habitualmente *modo interno* o *modo de forma*, y su mismo nombre indica cuál es la influencia que describe sobre el solitón. Se ve de la expresión de la autofunción correspondiente, Ec. (4.19), que este modo está localizado en la zona dónde se encuentra la estructura del solitón, y da cuenta de la deformación de esa misma estructura causada por las excitaciones. Ya dije al hablar de las generalidades del modelo ϕ^4 que este modo juega un papel clave en el fenómeno de las resonancias en las colisiones *kink-antikink* (Campbell *et al.*, 1983). Finalmente, los modos asociados al espectro continuo se agrupan colectivamente bajo el nombre de *modos de radiación* o *modos de fonón*, de los que ya he hablado. También por inspección visual de la Ec. (4.20) se deduce que son esencialmente ondas planas salvo por una distorsión en la región espacial correspondiente a la posición que ocupa el centro del *kink*. Esta descomposición se ha mostrado especialmente útil para entender las consecuencias físicas de la introducción de perturbaciones en modelos NKG. El caso que yo estudio en lo que sigue, el modelo ϕ^4 estocástico, sirve además de ejemplo de ello.

Dicho esto, voy a calcular separadamente las distintas contribuciones de cada modo a la primera corrección perturbativa, que son

$$\phi(t, \zeta) = \phi^{(0)}(t, \zeta) + \phi^{(1)}(t, \zeta) + \phi^{(ph)}(t, \zeta), \quad (4.25)$$

con las definiciones

$$\begin{aligned} \phi^{(0)}(t, \zeta) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \psi_0(\zeta) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} \frac{\exp\left(-i\zeta \frac{\sqrt{2}\omega v}{\sqrt{1-v^2}}\right)}{E(\omega) + 4} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta' \psi_0(\zeta') \tilde{\mathcal{F}}(\omega, \zeta') \exp\left(i\zeta' \frac{\sqrt{2}\omega v}{\sqrt{1-v^2}}\right), \quad (4.26) \\ \phi^{(1)}(t, \zeta) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \psi_1(\zeta) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} \frac{\exp\left(-i\zeta \frac{\sqrt{2}\omega v}{\sqrt{1-v^2}}\right)}{E(\omega) + 1} \times \end{aligned}$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta' \psi_1(\zeta') \tilde{\mathcal{F}}(\omega, \zeta') \exp \left(i\zeta' \frac{\sqrt{2}\omega v}{\sqrt{1-v^2}} \right), \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \phi^{(ph)}(t, \zeta) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \psi_k(\zeta) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} \frac{\exp \left(-i\zeta \frac{\sqrt{2}\omega v}{\sqrt{1-v^2}} \right)}{E(\omega) - k^2} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta' \psi_k^*(\zeta') \tilde{\mathcal{F}}(\omega, \zeta') \exp \left(i\zeta' \frac{\sqrt{2}\omega v}{\sqrt{1-v^2}} \right). \end{aligned} \quad (4.28)$$

4.2.1 Modo de traslación

Voy a ocuparme en primer lugar de la contribución del modo cero, $\phi^{(0)}(x, t)$. Para ello, sustituyo $\tilde{\mathcal{F}}$ por su expresión, Ec. (4.15) e invierto la transformada Fourier, con lo que encuentro

$$\begin{aligned} \phi^{(0)}(t, \zeta) &= -\frac{1-v^2}{2\pi} \psi_0(\zeta) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta' \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega\mu} \psi_0(\zeta') \times \right. \\ &\times \left[F(t', \zeta') R[\phi_0(\zeta')] - \left(\nu_{0,\tau} - \frac{v}{\sqrt{2(1-v^2)}} \phi_{0,\tau\zeta'} \right) \right] - \\ &\left. - i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta' \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega\mu} \psi_0(\zeta') \phi_{0,\tau} \right\}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

dónde he introducido la variable

$$\mu \equiv (t - t') - \frac{\sqrt{2}v}{\sqrt{1-v^2}} (\zeta - \zeta'). \quad (4.30)$$

Las integrales sobre ω se calculan fácilmente en el plano complejo, y la Ec. (4.29) se transforma en

$$\begin{aligned} \phi^{(0)}(t, \zeta) &= (1-v^2) \psi_0(\zeta) \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \psi_0(\zeta') \theta(\mu) \times \\ &\times \left\{ \mu \left[F(t', \zeta') R[\phi_0(\zeta')] + \frac{v}{\sqrt{2(1-v^2)}} \phi_{0,\tau\zeta'} - \nu_{0,\tau} \right] - \phi_{0,\tau} \right\}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

dónde $\theta(\mu)$ es la función paso o de Heaviside. De la expresión que acabo de escribir se deduce que, dado que las integrales tienen —por la acción de la función paso— un límite superior dado por $t - \sqrt{2}v(\zeta - \zeta')/\sqrt{1-v^2}$, $\phi^{(0)}$ crecerá indefinidamente cuando $t \rightarrow \infty$, dando lugar a un término secular. Hay que exigir entonces que esta contribución se anule, o, de lo

contrario, la teoría de perturbaciones para calcular correcciones pequeñas quedaría totalmente invalidada —o sería necesario restringirla a tiempos extremadamente cortos, lo que a efectos prácticos es invalidarla—. Para imponer esta ligadura dispongo, como ya adelanté, de funciones libres —los parámetros del *kink*— para asegurar que se anule la contribución del modo cero. Tal ligadura me permite obtener las ecuaciones de evolución del centro y la velocidad del *kink*. Por lo tanto, después de calcular $\nu_{0,\tau}$, $\phi_{0,\tau}$ and $\phi_{0,\tau\zeta'}$, bastan algunos cálculos sencillos para convencerse de que las ecuaciones

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{3}{4}\sqrt{2} [1 - v^2(t)]^{3/2} \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta'}{\cosh^2 \zeta'} F(t, \zeta') R[\phi_0(\zeta')], \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= v(t) - \\ &- \frac{3}{2}v(t) [1 - v^2(t)] \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta'}{\cosh^2 \zeta'} \zeta' F(t, \zeta') R[\phi_0(\zeta')] \end{aligned} \quad (4.33)$$

deben verificarse para que el término secular desaparezca de nuestro desarrollo perturbativo. Por claridad, he vuelto a la variable física t en vez de mantener τ .

Si ahora particularizo para el modelo ϕ^4 estocástico, sustituyendo

$$\varepsilon f(x, t) R[\phi] = \xi(t)(\phi - \phi^3) \quad (4.34)$$

en (4.32) and (4.33), encuentro que las ecuaciones del centro y la velocidad se reducen a

$$v'(t) = 0, \quad (4.35)$$

$$z'(t) = v(t) - \frac{1}{2}v(t) [1 - v^2(t)] \xi(t). \quad (4.36)$$

Pero estas ecuaciones no son más que las de la aproximación adiabática que derivé de forma sencilla en el capítulo anterior, Ecs. (3.12) y (3.13). Sucede lo mismo si se introduce el efecto añadido de la disipación, que lleva a

$$v'(t) = -\alpha\gamma v(t), \quad (4.37)$$

y una vez más la ecuación (4.36) sigue siendo válida para $z(t)$. Esta igualdad de los resultados obtenidos por ambos procedimientos es muy interesante sobre todo por dos razones. La primera y más inmediata es porque proporciona una base firme para las ecuaciones de la aproximación adiabática, cuya derivación en el marco de este tratamiento perturbativo está plenamente justificada. La segunda razón es más profunda y más física: ahora estoy en

condiciones de interpretar claramente en qué consisten las aproximaciones que hacía en el formalismo adiabático para llegar a las ecuaciones de coordenadas colectivas. Dichas ecuaciones contienen sólo la contribución del modo de traslación, y su derivación via cantidades conservadas involucra el despreciar el papel de los modos interno y de radiación en la excitación del *kink* inducida por el ruido. Otra manera de verlo, que también he usado ya, es decir que la aproximación adiabática reduce el problema de infinitos grados de libertad —los infinitos modos que se pueden excitar por la perturbación— a uno —el modo de traslación—.

A continuación, armados con las ligaduras (4.35) y (4.36), puedo volver sobre la contribución del modo cero, Ec. (4.31), libre ya del desagradable término secular, y que simplemente es

$$\begin{aligned} \phi^{(0)}(t, \zeta) = (1 - v^2) \psi_0(\zeta) \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta' \psi_0(\zeta') \int_{-\infty}^{\infty} dt' \theta(\mu) \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta'' \times \\ \times F(t', \zeta'') R[\phi_0(\zeta'')] \times \{ \mu A(\zeta', \zeta''; v) - B(\zeta', \zeta''; v) \}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

dónde

$$A(\zeta', \zeta''; v) = \delta(\zeta' - \zeta'') + \frac{3v^2}{2} \phi_{0,\zeta'\zeta'} \frac{\zeta'' - \zeta'}{\cosh^2 \zeta''} - \frac{3}{4} (1 + v^2) \phi_{0,\zeta'} \frac{1}{\cosh^2 \zeta''}, \quad (4.39)$$

y

$$B(\zeta', \zeta''; v) = \frac{3v\sqrt{1-v^2}}{2\sqrt{2}} \frac{\zeta'' - \zeta'}{\cosh^2 \zeta''} \phi_{0,\zeta'}. \quad (4.40)$$

Esta expresión también debe ser particularizada para el caso que me ocupa, pero, si se hace, se ve fácilmente que $\phi^{(0)}$ se anula. Así pues, y sorprendentemente, resulta que la aproximación adiabática da cuenta de todos los efectos relacionados con la excitación del modo cero. Parece claro que esto es así porque la perturbación del modelo ϕ^4 estocástica es espacialmente homogénea. Concluyo entonces que las ecuaciones (4.35) y (4.36) —o las Ecs. (3.12) y (3.13)— contienen toda la información referida al movimiento del *kink* como un todo y sólo esa información, y que cualquier cambio en la forma del *kink*, de producirse, tendrá que ser descrito por el modo interno —un comentario al margen es que la situación es análoga en el modelo sG: se prueba (Kivshar y Malomed, 1989) que no hay ninguna corrección localizada a la forma del solitón precisamente porque el espectro discreto de sG consta tan solo de modo de traslación—.

4.2.2 Modos interno y de radiación

De la misma forma que en la sección anterior, se calculan las contribuciones de los modos interno y de fonones; es decir, se precisa tan sólo alguna integración en el plano complejo, un algo de álgebra y tener en cuenta las ecuaciones de ligadura (4.32) y (4.33) para ver que la corrección debida a la excitación del modo interno es

$$\begin{aligned} \phi^{(1)}(t, \zeta) = (1 - v^2) \psi_1(\zeta) \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta' \psi_1(\zeta') \int_{-\infty}^{\infty} dt' \theta(\mu) \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta'' \times \\ \times F(t', \zeta'') R[\phi_0(\zeta'')] \left\{ \frac{\sin(\Omega\mu)}{\Omega} A(\zeta', \zeta''; v) - \cos(\Omega\mu) B(\zeta', \zeta''; v) \right\} \end{aligned} \quad (4.41)$$

dónde $\Omega \equiv \sqrt{\frac{3}{2}(1 - v^2)}$, y que se reduce a

$$\begin{aligned} \phi^{(1)}(t, \zeta) = \frac{3}{4} (1 - v^2) \frac{\sinh \zeta}{\cosh^2 \zeta} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta' \frac{\sinh \zeta'}{\cosh^4 \zeta'} \int_0^{\infty} dt' \theta(\mu) \xi(t') \times \\ \times \left\{ 2(1 - v^2) \frac{\sin(\Omega\mu)}{\Omega} \tanh \zeta' - \frac{v\sqrt{1 - v^2}}{\sqrt{2}} \cos(\Omega\mu) \right\} \end{aligned} \quad (4.42)$$

para el modelo ϕ^4 estocástico. Por lo que respecta a la radiación, contribuye con el término

$$\begin{aligned} \phi^{(ph)}(t, \zeta) = (1 - v^2) \int_{-\infty}^{\infty} dk \psi_k(\zeta) \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta' \psi_k^*(\zeta') \int_{-\infty}^{\infty} dt' \theta(\mu) \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta'' \times \\ \times F(t', \zeta'') R[\phi_0(\zeta'')] \left\{ \frac{\sin(\Omega_k \mu)}{\Omega_k} A(\zeta', \zeta''; v) - \cos(\Omega_k \mu) B(\zeta', \zeta''; v) \right\} \end{aligned} \quad (4.43)$$

siendo ahora

$$\Omega_k^2 \equiv \frac{(k^2 + 4)}{2} (1 - v^2), \quad (4.44)$$

que particularizado, se escribe

$$\begin{aligned} \phi^{(ph)}(t, \zeta) = (1 - v^2) \int_{-\infty}^{\infty} dk \psi_k(\zeta) \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta' \psi_k^*(\zeta') \int_0^{\infty} dt' \theta(\mu) \xi(t') \times \\ \times \frac{1}{\cosh^2 \zeta'} \left\{ 2(1 - v^2) \frac{\sin(\Omega_k \mu)}{\Omega_k} \tanh \zeta' - \frac{v\sqrt{1 - v^2}}{\sqrt{2}} \cos(\Omega_k \mu) \right\}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Una vez que he obtenido expresiones explícitas para las distintas contribuciones de los modos, es preciso comentar y discutir con cierto detalle sus

características más importantes, puesto que las expresiones son explícitas pero un tanto farragosas. En primer lugar, un resultado físico, natural y que se deduce de manera sencilla es que todas las correcciones $\phi^{(i)}(t, \zeta)$ son lineales en el proceso estocástico $\xi(t)$, y como consecuencia directa sus respectivos valores medios son cero, $\langle \phi^{(i)}(t, \zeta) \rangle = 0$; más aún, por ser lineales en un proceso gaussiano, son a su vez procesos gaussianos, y su estadística está completamente determinada por su segundo momento, la dispersión o varianza. También aparece de forma evidente algo que ya he averiguado a través de las simulaciones: el prefactor que aparece en las expresiones (4.42) y (4.45), $(1 - v^2)$ asegura que la excitación de los modos interno y de radiación va a cero cuando se consideran *kinks* ultrarelativistas, lo que es tanto como decir que dichos *kinks* no se ven afectados por el ruido —ni siquiera en sus coordenadas colectivas, debido a que contienen el mismo factor—. Ello explica y se corresponde con el hallazgo numérico de que los efectos de la perturbación son tanto menores cuanto mayor es la velocidad inicial de los solitones.

Como todos los modos dan contribuciones aditivas —ver Ec. (4.25)—, puedo considerarlos separadamente. Como ya me ocupé de las coordenadas colectivas del *kink* en el capítulo anterior —y por ende de toda la influencia del modo cero—, voy a concentrarme ahora en los otros modos. Para hacer más sencilla e inteligible la discusión, tomo arbitrariamente $v = 0$ en esta sección. Los *kinks* en movimiento vendrán a experimentar cualitativamente el mismo tipo de fenómenos, si bien renormalizados por efecto de su velocidad.

Empezaré por calcular la densidad media de energía del modo interno, para lo que, como acabo de explicar, asumo $v = 0$, lo que transforma la Ec. (4.42) en

$$\phi^{(1)}(t, \zeta) = \frac{\sqrt{6}}{64} \pi \frac{\sinh \zeta}{\cosh^2 \zeta} \int_0^t dt' \xi(t') \sin \left[\sqrt{\frac{3}{2}}(t - t') \right]. \quad (4.46)$$

En esta ecuación aparece claramente el hecho de que el modo interno no va a afectar a la dinámica del solitón —en el sentido de que no induce a moverse al *kink* en reposo, tampoco va a frenar o acelerar a los *kinks* en movimiento— y sólo va a tomar parte en las fluctuaciones de la anchura del *kink*. Teniendo en cuenta además la ecuación (4.36), puedo concluir que la velocidad del solitón no se verá modificada por las fluctuaciones del potencial si su valor inicial es cero. Una vez más, esto está en perfecto acuerdo con las simulaciones, en las que un solitón en reposo resulta mantenerse parado dentro del error de la máquina.

El valor medio de la energía se sigue ahora directamente de dicha expresión; tras promediar los cuadrados de ambos miembros se obtiene

$$\langle \phi^{(1)2}(t, \zeta) \rangle = \frac{3\pi^2}{2^{10}} D \frac{\sinh^2 \zeta}{\cosh^4 \zeta} \left(t - \frac{1}{\sqrt{6}} \sin \sqrt{6} t \right). \quad (4.47)$$

Así, la energía del modo interno crece con el tiempo de acuerdo a una ley de tipo difusión, es decir, $\sim Dt$. En otras palabras, comparando con lo que le ocurre a un *kink* de sG, hay un grado interno de libertad adicional que sufre la difusión usual causada por una fuerza estocástica gaussiana. La función $\phi^{(1)}(t, \zeta)$ juega entonces el papel de una coordenada en este formalismo. Sin embargo, no he observado ningún cambio visible de la forma del solitón en mis simulaciones numéricas de ruidos débiles, el rango para el que se aplica este cálculo perturbativo. Me parece bastante lógico que sea así debido al factor numérico tan pequeño que aparece en la ecuación (4.47), que hace que el coeficiente de difusión efectiva sea aproximadamente un orden de magnitud menor que D —lo que conlleva que la difusión no sea efectiva hasta transcurridos tiempos muy largos—.

Tras esta digresión sobre el modo interno, paso sin más a comentar el resultado perturbativo para la contribución de los modos de fonón. A tal fin es más conveniente escribir la Ec. (4.45) en una forma no sólo más conveniente sino también más física, para lo cual recorro a las definiciones (4.30) y (4.44) y presento este término como un desarrollo en ondas planas:

$$\phi^{(ph)}(t, \zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \left[A_+(k) e^{i(K+\zeta-\Omega_+t)} + A_-(k) e^{i(K-\zeta-\Omega_-t)} \right]. \quad (4.48)$$

Aquí he introducido

$$K_{\pm} \equiv \frac{k \mp v\sqrt{k^2 + 4}}{\sqrt{2(1-v^2)}} \quad (4.49)$$

$$\Omega_{\pm} \equiv \frac{kv \mp \sqrt{k^2 + 4}}{\sqrt{2(1-v^2)}} \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} A_{\pm} \equiv & -(1-v^2)^{3/2} \frac{3 \tanh^2 \zeta - 3ik \tanh \zeta - (1+k^2)}{[2\pi(1+k^2)(4+k^2)]^{1/2}} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta' \psi_k^*(\zeta') \int_0^{\infty} dt' \theta(\mu) \xi(t') e^{\mp i\Omega_k(t' - \sqrt{2}v\zeta'/\sqrt{1-v^2})} \times \\ & \times \left[\pm \sqrt{\frac{2}{3}} i \tanh \zeta' + \frac{v}{2\sqrt{2}} \right] \frac{1}{\cosh^2 \zeta'}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Con esto, los parámetros K_{\pm} and Ω_{\pm} hacen las veces de vectores de onda y frecuencias de la radiación, respectivamente. No es difícil ver que incluso satisfacen la relación de dispersión

$$\Omega_{\pm}^2 = K_{\pm}^2 + 2, \quad (4.52)$$

que no es otra que la de los modos lineales excitados en torno al *kink* —ver por ejemplo Krumhansl y Schrieffer (1975)—. Las funciones $A_{\pm}(k)$ juegan el papel del espectro de radiación, y describen la amplitud de las ondas lineales —que también llamaré *ruido lineal*— que la perturbación genera en el sistema.

Los modos radiativos aportan la contribución más importante e interesante a la solución total en la región de las colas del *kink*, lejos del centro. Ello me lleva a estudiar $A_{\pm}(k)$ at $|\zeta| \gg 1$. De nuevo, para simplificar las cosas, tomo $v = 0$ —lo que a los efectos de las alas no es demasiado relevante— y simplifico las funciones, quedándome con

$$A_{\pm}(k) = \pm a(k) \int_0^t dt' \xi(t') e^{\mp i \sqrt{\frac{3}{2}} t'}, \quad (4.53)$$

dónde la función

$$a(k) = \sqrt{\frac{2}{3}} k \frac{2 - 3ik \operatorname{sign} \zeta - k^2}{(1 + k^2)(4 + k^2)} \quad (4.54)$$

contiene toda la dependencia del espectro en el parámetro k . La densidad media de energía de los fonones se deriva inmediatamente sin más que recordar la Ec. (4.53) y usar las propiedades estadísticas del ruido (3.3):

$$\langle |A_{\pm}|^2 \rangle = \frac{4}{3} \frac{k^2(k^4 + 5k^2 + 4)}{(1 + k^2)^2(4 + k^2)^2} D t. \quad (4.55)$$

La dependencia en k de esta densidad de energía se representa en la figura 4.1. En ella se aprecia que la mayor cantidad de radiación es la generada con

$$k_{\max} \approx 1.425 \quad (4.56)$$

indistintamente hacia ambos lados de la estructura del *kink*. Estos valores corresponden a ondas cuasilineales con números de onda $K_{+} = K_{-} = k_{\max}/\sqrt{2} \approx 1.008$ y frecuencias $\Omega_{\pm} = \mp \sqrt{(k_{\max}^2 + 4)/2} \approx 1.736$.

La curva en la figura 4.1 es simétrica, y, por otra parte, se comporta como $4k^2$ en un entorno de $k = 0$, y como k^{-2} cuando $k \rightarrow \pm\infty$. Además, el resultado (4.55) no depende del signo de ζ , lo que quiere decir que la

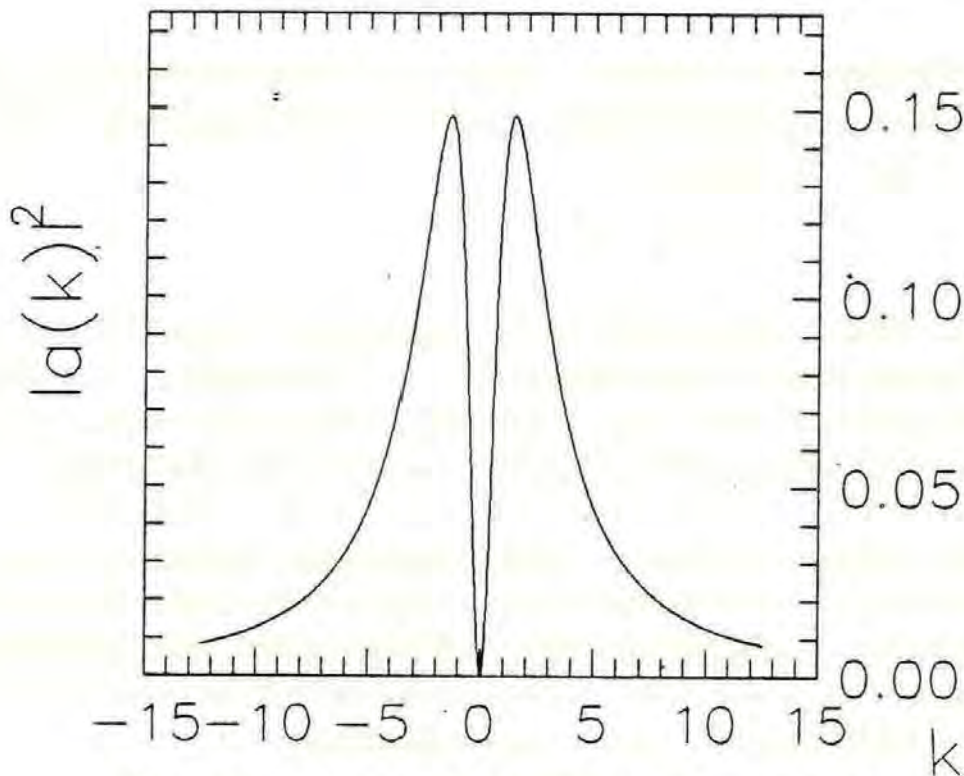


Figura 4.1: Densidad de energía de la radiación

intensidad de las ondas es la misma en ambos sentidos. Es obvio que este hecho viene de la restricción que he impuesto de considerar *kinks* en reposo, y que valores no nulos de la velocidad inducirán una ruptura de esta simetría. Las leyes y ecuaciones correspondientes pueden obtenerse como acabo de hacer, con la única complicación añadida de la mayor cantidad de álgebra necesaria para manejar la ecuación (4.51). Por último, como se ve, de nuevo resulta un crecimiento de tipo difusivo de la energía media —Ec. (4.55)— que se interpreta físicamente como sigue. La derivada $d \langle |A_{\pm}|^2 \rangle / dt$ tiene el significado de una densidad de potencia de la radiación emitida, y las fluctuaciones del potencial actúan sobre el *kink* continuamente, lo que equivale a decir que se crean fonones constantemente. En tal caso, lo que está diciendo la fórmula (4.55) es que la potencia de este proceso de creación de fonones no depende del tiempo.

4.3 Interacción de los *kinks* con las fronteras

Después de este análisis del efecto de las perturbaciones débiles en términos de los modos normales, en los que he descrito como aparece la radiación, quiero tocar otro punto sobre el que hasta el momento la única información que he obtenido es numérica; concretamente, voy a estudiar la interacción

de los *kinks* con las frontera entre zonas perturbadas y zonas sin perturbar. En las simulaciones, encontré que los *kinks* son incapaces de atravesar estas fronteras y se quedan clavados en ellas cuando su velocidad es lo bastante pequeña, y ahora mi interés es ver si se puede justificar teóricamente este fenómeno. De hecho se puede, como pruebo a continuación.

Matemáticamente, he de considerar el problema (3.4) con

$$\epsilon_0 \equiv 1 + \theta(x)\xi(t), \quad (4.57)$$

dónde $\xi(t)$ es de nuevo un ruido blanco gaussiano con estadística dada por la Ec. (3.3). En la notación de la ecuación general (4.1), lo que tengo es una nueva función $f(x, t) \equiv \theta(x)\xi(t)$, con la frontera situada en $x = 0$ sin pérdida de generalidad. Sustituyendo estas funciones en las ecuaciones de la aproximación adiabática (4.32) y (4.33) y calculando las integrales resultantes se puede escribir el sistema que gobierna la evolución de los parámetros del solitón:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{3}{8} (1 - v^2)^{3/2} \xi(t) a_v(z, v), \quad (4.58)$$

$$\frac{dz}{dt} = v - \frac{3}{8} v (1 - v^2) \xi(t) a_z(z, v), \quad (4.59)$$

con

$$a_v(z, v) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \cosh^{-4} \left(\frac{z}{\sqrt{2/(1-v^2)}} \right) \quad (4.60)$$

$$a_z(z, v) \equiv -\frac{z}{\sqrt{2(1-v^2)} \cosh^4(z/\sqrt{2(1-v^2)})} + \frac{2}{3} + \tanh \left(\frac{z}{\sqrt{2(1-v^2)}} \right) - \frac{1}{3} \tanh^3 \left(\frac{z}{\sqrt{2(1-v^2)}} \right) \quad (4.61)$$

En principio, se podría pensar que es posible seguir adelante a partir de estas ecuaciones. Sin embargo, el camino se vuelve en seguida enormemente complicado y no se llega —o yo no he sabido llegar, al menos— a ninguna conclusión. Lo mismo ocurre si se intenta aplicar el formalismo de ecuaciones Fokker-Planck, algo que nada en las ecuaciones nos impide hacer, pero que conduce a una ecuación de Fokker-Planck realmente poco útil. Ante estos problemas, prefiero limitar mi objetivo a intentar probar la siguiente afirmación: la velocidad media de un *kink* que incide sobre una frontera entre partes sin perturbar y perturbadas decrece si el valor inicial de tal velocidad es suficientemente pequeño. Obviamente esto no va a ser una demostración

de como tiene lugar el *pinning*, o de qué velocidad umbral es necesaria para impedirlo, pero al menos explica en parte las raíces del fenómeno, lo cual es un avance, y puede permitir en un futuro responder mejor a esta cuestión, otra de las que dejo abiertas en esta tesis.

Para la discusión subsiguiente, es mucho más conveniente cambiar de variables, pasando a

$$u \equiv \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \zeta \equiv \frac{z}{\sqrt{1-v^2}}, \quad (4.62)$$

con lo que $a_z(z, v) = a_z(\zeta)$, $a_v(z, v) = a_v(\zeta)$, y las Ecs.(4.58) y (4.59) se transforman en

$$\frac{du}{dt} = -\hat{\xi}(t) a_v(\zeta) \quad (4.63)$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = u - \hat{\xi}(t) \frac{u}{1+u^2} A(\zeta), \quad (4.64)$$

dónde,

$$A(\zeta) \equiv a_z(\zeta) + \frac{\zeta}{\sqrt{2}} a_v(\zeta), \quad (4.65)$$

y $\hat{\xi}(t) \equiv \frac{3}{8} \xi(t)$ es el proceso aleatorio pero renormalizado —análogamente, en los párrafos siguientes usaré la notación $\hat{D} = 9D/64$ —.

Para probar que la velocidad de los solitones disminuye, he de calcular $\langle d\zeta/dt \rangle$. Y para ello, necesitaré recurrir al siguiente teorema, bastante famoso y debido a Novikov (1965):

$$\langle \xi(t) \mathcal{F}[\xi] \rangle = \int_0^t dt' \langle \xi(t) \xi(t') \rangle \langle \frac{\delta \mathcal{F}[\xi]}{\delta \xi(t')} \rangle, \quad (4.66)$$

para cualquier funcional $\mathcal{F}[\xi]$ del proceso estocástico $\xi(t)$. Con la ayuda de esta expresión, se puede promediar sin más las ecuaciones (4.63) y (4.64), y se tiene

$$\langle \frac{du}{dt} \rangle = -\frac{4\hat{D}}{\sqrt{2}} \langle \frac{u}{1+u^2} \frac{\sinh(\zeta/\sqrt{2})}{\cosh^5(\zeta/\sqrt{2})} A(\zeta) \rangle \quad (4.67)$$

$$\langle \frac{d\zeta}{dt} \rangle = \langle u \rangle + \hat{D} \langle \frac{1+u^4}{(1+u^2)^2} \frac{A(\zeta)}{\sqrt{2} \cosh^4(\zeta/\sqrt{2})} \rangle. \quad (4.68)$$

Aquí entra en juego el hecho de que me voy a restringir a velocidades pequeñas, además de lo cuál, como es lógico en el marco de una teoría de

perturbaciones, tendré que considerar ruidos débiles, o sea $\hat{D} \ll 1$. Estos ruidos débiles sólo serán capaces de detener los *kinks* muy lentos, como se ve en las simulaciones, así que tendré que exigir también que $v \ll \hat{D} \ll 1$ y por tanto, de la definición (4.62)), $u \ll 1$. Dicho más precisamente, lo que estoy asumiendo no es más que suponer que las fluctuaciones de la velocidad son menores o del orden de \hat{D} . Bajo esta hipótesis se pueden linealizar las expresiones (4.67) and (4.68), despreciando términos de orden u^2 y superiores, con lo que el sistema se reduce a

$$\left\langle \frac{du}{dt} \right\rangle = -4 \hat{D} \left\langle u \tanh \left(\frac{\zeta}{\sqrt{2}} \right) \mathcal{A}(\zeta) a_v(\zeta) \right\rangle, \quad (4.69)$$

$$\left\langle \frac{d\zeta}{dt} \right\rangle = \left\langle u \right\rangle + \hat{D} \left\langle \mathcal{A}(\zeta) a_v(\zeta) \right\rangle, \quad (4.70)$$

dónde he omitido contribuciones de orden $\hat{D}^4 \sim u^2 \hat{D}^2$ y ordenes superiores.

Para resolver el sistema dado por las Ecs. (4.69) y (4.70), he de encontrar primero $\left\langle u \right\rangle$, y sustituirlo luego en la ecuación de $d \left\langle \zeta \right\rangle / dt$. El problema es que la incógnita u aparece también en el segundo miembro de la expresión (4.69). Esta dificultad se elimina utilizando de nuevo la condición $u \ll 1$ para linealizar la ecuación estocástica Ec. (4.64), y con ello se obtiene

$$u = \frac{d\zeta}{dt} (1 + \hat{\xi}(t) \mathcal{A}(\zeta)), \quad (4.71)$$

una expresion para u que ahora puedo utilizar en la Ec. (4.69). Así, en primer orden, tengo

$$\left\langle \frac{du}{dt} \right\rangle = -4 \hat{D} \frac{d}{dt} \left\langle F\left(\frac{\zeta}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle, \quad (4.72)$$

dónde

$$\begin{aligned} F(x) \equiv & -\frac{1}{6 \cosh^4 x} + \frac{6}{35} \tanh x - \frac{2}{35} \tanh^3 x \\ & - \frac{13}{105} \frac{\sinh x}{\cosh^5 x} - \frac{1}{21} \frac{\sinh x}{\cosh^7 x}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Teniendo en cuenta que

$$\left\langle u \right\rangle (t=0) = u_0 = \frac{v_0}{\sqrt{1-v_0^2}} \approx v_0, \quad (4.74)$$

dónde $0 < v_0 \ll 1$ es la velocidad inicial del *kink* dirigiéndose hacia la frontera, la Ec. (4.72) se puede integrar sin problemas. Asumiendo por

ejemplo que la posición inicial del *kink* coincide con el origen, el resultado se puede escribir en la forma:

$$\langle u \rangle = u_0 - \frac{2}{3} \hat{D} - 4\hat{D} \langle F(\frac{\zeta}{\sqrt{2}}) \rangle. \quad (4.75)$$

Con esto ya puedo calcular $d\langle z \rangle / dt$ a partir de la Ec. (4.70). De la definición de ζ en la Ec. (4.62), puede verse que

$$\langle \frac{d\zeta}{dt} \rangle \approx \langle \frac{dz}{dt} \rangle + \langle uz \frac{du}{dt} \rangle; \quad (4.76)$$

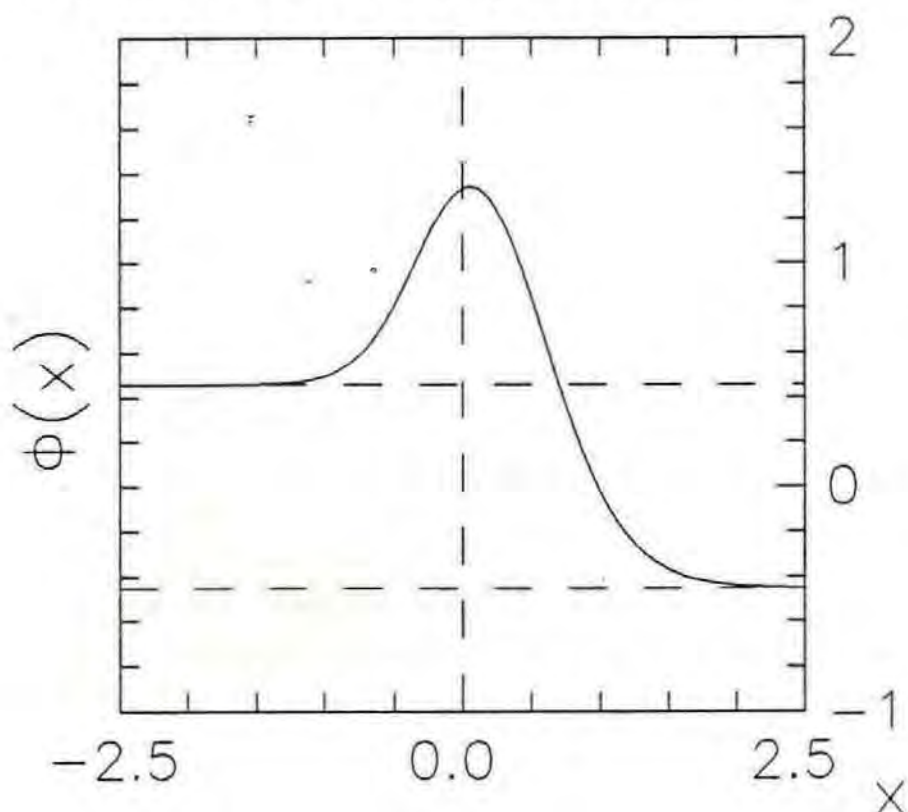
combinando las Ecs. (4.63), (4.70), (4.75) y (4.76), y aplicando una vez más a esta última el teorema de Novikov (4.66) para trabajar con el último término de su miembro derecho, se llega a la expresión final, que es

$$\langle \frac{dz}{dt} \rangle = \hat{D} \langle \Phi(\frac{\zeta}{\sqrt{2}}) \rangle + u_0 - \frac{2}{3} \hat{D}, \quad (4.77)$$

con

$$\begin{aligned} \Phi(x) \equiv & \frac{4}{3} \frac{1}{\cosh^4 x} - \frac{24}{35} \tanh x + \frac{8}{35} \tanh^3 x + \\ & + \frac{122}{105} \frac{\sinh x}{\cosh^5 x} + \frac{11}{21} \frac{\sinh x}{\cosh^7 x} - \frac{x}{\sqrt{2} \cosh^8 x}. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Analizaré la función $\Phi(x)$ en detalle —ver la gráfica 4.2—. Sus comportamientos asintóticos vienen dados por $\Phi(\pm\infty) = \mp \frac{16}{35}$, valores a los que tiende exponencialmente en las regiones $x < -1$ and $x > 1$, respectivamente. Resaltaré que $\Phi(0) = \frac{4}{3}$ and $\Phi'(0) > 0$, y por tanto $\max \Phi(x) \equiv \Phi_{\max}$ está en $x = x_{\max} > 0$; numéricamente se encuentra que estos puntos son $\Phi_{\max} \approx 1.341$ y $x_{\max} \approx 0.0526$. En este momento hay que tener en cuenta dos hechos: primero, como ya he asumido previamente, la dispersión de las fluctuaciones de $v(t)$ y $z(t)$ son de orden $\hat{D}t$, y, segundo, que el *kink* alcanza una posición $z \lesssim 1$ en tiempos en torno a $t \lesssim \hat{D}^{-1}$, puesto que $u_0 \sim \hat{D}$ y x_0 se ha tomado cero —lo que no es una restricción porque siempre se puede redefinir t tomando el origen de tiempos en el momento en que el núcleo del *kink* llega justamente a tocar la frontera. De estas dos cosas, y de la forma de la función Φ , resulta por inspección que en algún momento, el valor promedio del segundo miembro de la ecuación (4.77) se hace cero, concretamente en algún instante $t \lesssim \hat{D}^{-1}$, siempre, claro está, que $u_0 \lesssim \hat{D}$. Cuando esto sucede, el *kink* se ve atrapado por la frontera, o, para ser exactos, en la parte estocástica de un pequeño entorno de la barrera, como quería demostrar.

Figura 4.2: La función $\Phi(x)$

Este último razonamiento se puede entender también de modo más simple —y menos riguroso—: puedo pensar en calcular el promedio de Φ en el miembro de la derecha de la Ec. (4.77) con ayuda de una distribución Gaussiana efectiva de probabilidad para ζ —el carácter Gaussiano es necesario, y no arbitrario, una vez más debido a la linealidad—, algo así, por ejemplo, como

$$P_{\text{eff}}(\zeta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma_{\text{eff}}} \exp \left[-\frac{(\zeta - u_0 t)^2}{4\sigma_{\text{eff}}^2} \right], \quad (4.79)$$

con $\sigma_{\text{eff}} \equiv D_{\text{eff}} t$. Por supuesto, no conozco σ_{eff} exactamente, pero sé que debe verificar que $\sigma_{\text{eff}} \propto \hat{D}$, que debe crecer con el tiempo, y que debe hacerse del orden de la unidad cuando $t \sim \hat{D}^{-1}$. He calculado numéricamente con una tal distribución el promedio que me interesa en la Ec. (4.77), y el resultado se ve en la figura 4.3. Para la probabilidad efectiva, he tomado de entre las muchas elecciones posibles, $u_0 = 0.1$ y $D_{\text{eff}} = \hat{D} = 2u_0$, esencialmente por razones de claridad de la gráfica y no por ninguna razón física en particular. Se aprecia como el *kink* sufre un proceso de frenado que acaba con su captura dentro de la zona ruidosa pero cerca de la frontera. Creo que queda bastante establecido el hecho que pretendía probar: los *kinks* lentos son atrapados por la frontera entre una zona normal y otra estocástica.

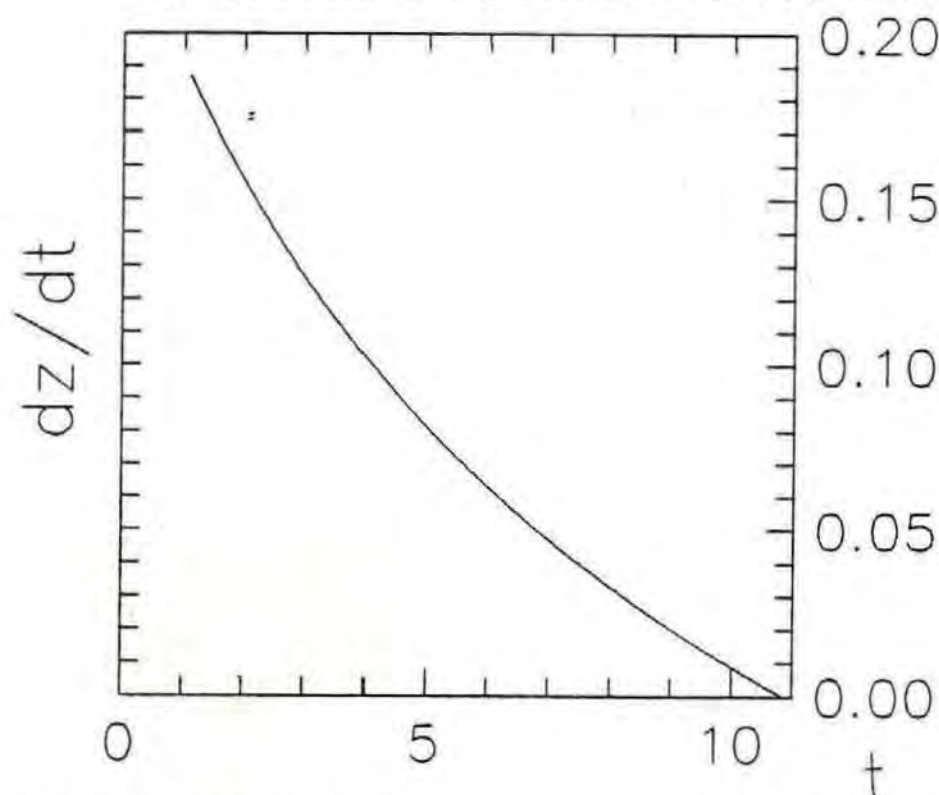


Figura 4.3: Evolución temporal efectiva de la velocidad

4.4 Teoría lineal de la radiación

La última cuestión que me voy a plantear en este capítulo intenta ir algo más allá de lo que he ido averiguando mediante el cálculo perturbativo, e ir a regímenes de ruido más fuertes. Recuerdo que los hechos más significativos de estos regímenes, distintos de los del régimen débil, eran los siguientes:

1. A tiempos $t > D^{-1}$ se produce difusión de forma anómala del centro del *kink* en su sistema de referencia propio. Con el término *difusión anómala* quiero decir que la dispersión del centro ya no crece como t , sino como t^δ , con $1 < \delta < 2$.
2. Tanto éste como los demás efectos se hacen menos notorios a medida que el *kink* se aproxima a la velocidad máxima, $v = 1$ en mis unidades.
3. La difusión anómala se ve acompañada por un crecimiento exponencial de la energía total contenida en el sistema.
4. El crecimiento de la energía acaba por cesar si se introduce disipación en el sistema.

Estos hechos no son explicables dentro de la aproximación adiabática —que predice dispersiones crecientes como t , por ejemplo— o mediante técnicas

cómo las que llevan a la ecuación PMR —que no predice ninguna manera concreta para la evolución de la energía—. Por tanto, es preciso otro acercamiento al problema para intentar al menos entender cualitativamente que ocurre en el modelo ϕ^4 estocástico a tiempos no muy cortos.

La forma que me parece más natural para este nuevo acercamiento es hacer la suposición de que estos fenómenos tienen que ver con aquello que se está despreciando en la aproximación adiabática, la radiación. Una vez más, recordaré que las partículas que están en el fondo de uno de los dos pozos no son afectadas por el ruido, pero las que están vibrando en torno a ese fondo —la radiación— sí lo son; menos que las de la estructura del *kink*, pero sí notan las fluctuaciones de la barrera. Cabe entonces suponer que la radiación originada en el movimiento del solitón en el sistema estocástico ve alterado su espectro cuando ella misma empieza a experimentar la influencia del ruido. De resultados de esa influencia la radiación crecería y contribuiría a la presencia de energía en el sistema y a la posición y dispersión del centro de masas, lo que me lleva a los fenómenos que pretendo entender. Así pues, esta no parece una mala hipótesis de partida; ahora voy a ser más preciso y ver si puede ser de utilidad, estudiando la evolución de las ondas lineales en el modelo ϕ^4 estocástico.

Como acabo de decir, y ya expliqué en la sección dedicada a las contribuciones de los modos, los *kinks* generan radiación debido a la presencia de la perturbación. Esa radiación tiene una velocidad de grupo distinta de la del *kink*, lo que conduce a la separación espacial del *kink* y de la radiación. En el intervalo de validez de los cálculos perturbativos, tiempos del orden de $(2D)^{-1/2}$ como ya he establecido, la radiación se mantiene en una amplitud despreciable, dado que la aproximación adiabática describe bien la dinámica del *kink*. ¿Qué ocurre luego? Para averiguarlo, tomo la ecuación de partida, la del modelo ϕ^4 estocástico, Ec. (3.4) y la linealizo en torno al *kink*, como hice en la sección 3.2, pero en vez de introducir el desarrollo perturbativo, lo que hago es buscar soluciones tipo onda plana, de la forma $\phi(x, t) \equiv \phi(t)e^{iKx}$, donde K debe entenderse como el vector de onda de un fonón emitido por el solitón, y ha de ser del tipo de los K_{\pm} —ver Ec.(4.49)—. Así puedo escribir

$$\ddot{\phi}(t) + [\Omega^2 + \xi(t)] \phi(t) = 0, \quad (4.80)$$

dónde los puntos indican derivadas respecto al tiempo, y Ω está dada por la Ec.(4.52). Ahora reescribo la ecuación precedente como dos de primer orden:

$$\dot{\phi}(t) = \nu(t), \quad (4.81)$$

$$\dot{\nu}(t) = -\Omega^2 \phi(t) - \xi(t)\phi(t). \quad (4.82)$$

Con este sistema puedo ya seguir adelante y obtener las propiedades estadísticas de las amplitudes $\phi(t)$ y $\nu(t)$.

La característica principal de la ecuación (4.80) —equivalentemente, del sistema (4.81) y (4.82)— es la llamada *resonancia paramétrica estocástica*: el acoplo del ruido con la función va a inducir un crecimiento resonante de dicha función. Esto quedará más claro tras el cálculo que resumo a continuación, en el que obtengo los primeros momentos de los procesos estocásticos $\phi(t)$ y $\nu(t)$. Las ecuaciones (4.81) y (4.82) pueden promediarse directamente recurriendo una vez más al teorema de Novikov (4.66), como en la sección anterior, y queda

$$\langle \dot{\phi} \rangle = \langle \nu \rangle, \quad (4.83)$$

$$\langle \dot{\nu} \rangle = -\Omega^2 \langle \phi \rangle. \quad (4.84)$$

Aparece aquí de manera evidente el hecho de que el ruido no juega ningún papel en la evolución del valor medio de la amplitud de radiación, que resulta comportarse periódicamente, de acuerdo a

$$\langle \phi \rangle(t) = \phi_+ e^{i\Omega t} + \phi_- e^{-i\Omega t}. \quad (4.85)$$

Las amplitudes ϕ_{\pm} deberían fijarse a partir de las condiciones iniciales, pero no voy a entrar ahora en esta cuestión, que no es crucial.

Los momentos de orden más bajo que sí se ven afectados por el ruido son los de orden dos. Las ecuaciones correspondientes se encuentran de la misma manera, y se tiene

$$\frac{d \langle \phi^2 \rangle}{dt} = 2 \langle \phi \nu \rangle, \quad (4.86)$$

$$\frac{d \langle \nu^2 \rangle}{dt} = -2 \Omega^2 \langle \phi \nu \rangle + 2D \langle \phi^2 \rangle, \quad (4.87)$$

$$\frac{d \langle \phi \nu \rangle}{dt} = \langle \nu^2 \rangle - \Omega^2 \langle \phi^2 \rangle. \quad (4.88)$$

Siguiendo el procedimiento habitual, busco soluciones tipo exponencial, proporcionales a $\exp(\lambda t)$, donde λ es una constante. Haciendo eso, se ve que los valores permitidos de λ son las soluciones de la ecuación secular

$$\lambda^3 + 4\lambda\Omega^2 - 4D = 0. \quad (4.89)$$

Esta ecuación se puede resolver analíticamente. El fenómeno de resonancia paramétrica tiene lugar si alguna de estas soluciones tiene parte real positiva,

y de hecho así sucede. Teniendo en cuenta que el mayor valor positivo de λ representa un tiempo característico de incremento de la energía contenida en los modos radiativos, me intereso esencialmente por este valor, que no es otro que

$$\lambda = 2^{1/3} \left[(\alpha^{1/2} + D)^{1/3} - (\alpha^{1/2} - D)^{1/3} \right], \quad (4.90)$$

con

$$\alpha \equiv \frac{16}{27} \Omega^6 + D. \quad (4.91)$$

En particular, para fonones de alta frecuencia, esta relación va asintóticamente como

$$\lambda \sim \frac{D}{\Omega^2}. \quad (4.92)$$

Así, debido a la resonancia paramétrica estocástica, el espectro de ruido lineal, generado en principio por la mera presencia de un *kink* en el sistema, se enriquece luego con ondas largas —frecuencias bajas— mucho más efectivamente que ondas cortas —en concordancia con lo que permiten decir las simulaciones—. Esta propiedad me permite esbozar la siguiente explicación de los hechos que resumí al principio de la sección. La radiación generada por el solitón se aleja de él debido a su diferente velocidad, dando lugar a partes del sistema en las que hay presentes excitaciones lineales y sólo ellas. Como se ve de la Ec. (4.48), la potencia del proceso de generación de esas ondas por los *kinks* es proporcional a $(1-v^2)$, y por consiguiente se anula cuando $v \rightarrow 1$. Con posterioridad a su aparición, esas ondas se excitan paramétricamente por acción del ruido, como se describe en las ecuaciones (4.86), (4.87) y (4.88). Esto comienza a ser importante a partir de un tiempo efectivo del orden de λ —tiempo que se hace infinito si D va a cero, en buena lógica—. Esto quiere decir que cuando $t \sim D^{-1}$ el potencial fluctuante interacciona de manera efectiva no sólo con el *kink* sino también con el ruido lineal que éste ha generado. Sin embargo, el espectro de esta radiación estocástica, lejos de mantenerse constante como sería si tuviera ruido blanco, decrece cuando $\Omega \rightarrow \infty$. Mas aún, de la ecuación (4.92), se ve que lo hace como una ley de potencias —uno puede desarrollar $\exp(\lambda t)$ en serie si $\Omega \gg \sqrt{D/\lambda}$ —. De todo esto se deduce que, fenomenológicamente, podría describir la influencia de este ruido lineal prescindiendo de él y sustituyéndolo por un proceso aleatorio aditivo efectivo en el modelo ϕ^4 estocástico, lo que llevaría a fluctuaciones en $v(t)$ dentro del marco de la aproximación adiabática (Rodríguez-Plaza y Vázquez, 1990) y con ello a la difusión no Browniana del *kink*.

Como resumen de esta sección, diré que con esta teoría lineal, he presentado un tratamiento cualitativo de las propiedades arriba mencionadas:

1. La amplitud del ruido lineal generado es mucho menor que la parte estocástica del potencial en tiempos $t > D^{-1}$ y se hace esencial cuando t rebasa ese umbral —*crossover* de régimen de ruido débil a ruido fuerte—.
2. La amplitud es proporcional a un factor $(1 - v^2)$ y se va a cero al crecer v hacia 1.
3. El crecimiento exponencial de la energía descubierto numéricamente está relacionado con el crecimiento exponencial de la amplitud de la radiación debido a la resonancia paramétrica estocástica.

Finalmente, diré que argumentos parecidos se pueden utilizar para considerar los efectos de la introducción de disipación en el sistema. La disipación da lugar a la aparición de un umbral para que la resonancia estocástica pueda ser posible: se puede ver de forma totalmente análoga al cálculo previo que este umbral es

$$D = \alpha \Omega^2, \quad (4.93)$$

dónde α es el coeficiente disipativo. Sustituyendo en la ecuación (4.93) los valores $\alpha = 0.1$, $D = 0.05$, elección representativa de los parámetros que he empleado en las simulaciones, concluyo que sólo las ondas largas, con $\Omega^2 < 0.5$ son inestables, mientras que el resto del espectro de la radiación no sufre el bombeo paramétrico en absoluto. Esto podría ser una buena justificación del cuarto punto de los que mencioné al comienzo de la sección. Queda abierto el hecho evidente de que un tratamiento más exacto debería incluir como siguiente mejora de la teoría efectos no lineales, que van haciéndose más importantes a medida que la radiación va creciendo en amplitud, y que podrían tener que ver con la transición al régimen final de destrucción rápida que se encuentra en las simulaciones.

El modelo ϕ^4 con potencial inhomogéneo

“Oyeron un ruido agudo y a un metro por encima de sus cabezas algo pasó silbando. Luego se produjo una explosión y en la vidriera del salón de la planta baja del hotel se abrió un agujero, cuyos bordes reproducían nítidamente la forma del Ping 903. Escucharon cómo, en el interior del salón, caían una tras otra las botellas y se estrellaban contra el suelo.”

Boris Vian, *El Otoño en Pekin*.

5.1 Introducción

En este capítulo, con el que cierro la parte de la tesis dedicada al estudio de perturbaciones descritas por procesos estocásticos continuos, voy a abordar el problema en el que esas perturbaciones dependen de la coordenada espacial, es decir, considero una vez más la ecuación ϕ^4

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \epsilon_0 (\phi - \phi^3) = 0, \quad (5.1)$$

pero ahora la altura de la barrera viene dada por

$$\epsilon_0 = 1 + \xi(x), \quad \langle \xi(x) \rangle = 0, \quad \langle \xi(x)\xi(x') \rangle = 2D\delta(x - x'). \quad (5.2)$$

Este cambio en la dependencia de la perturbación tiene consecuencias muy importantes, como espero mostrar a continuación, en la física del sistema, pero además, impone dificultades inmediatas en cuanto a la accesibilidad de esa física al tratamiento analítico. Así, utilizando el tratamiento perturbativo general del capítulo anterior, basta tener en cuenta la ecuación (5.2) en las ecuaciones de la aproximación adiabática (4.32) y (4.33) para

encontrar las ecuaciones de evolución de las coordenadas colectivas en este caso particular, que son

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{3}{4}\sqrt{2}[1-v^2(t)]^{3/2}\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta'}{\cosh^2 \zeta'} \xi'(\zeta') [\phi_0(\zeta') - \phi_0^3(\zeta')], \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} = & v(t) - \\ & - \frac{3}{2}v(t)[1-v^2(t)]\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta'}{\cosh^2 \zeta'} \zeta' \xi'(\zeta') [\phi_0(\zeta') - \phi_0^3(\zeta')], \quad (5.4) \end{aligned}$$

dónde he definido

$$\xi'(\zeta') \equiv \xi(\zeta' \sqrt{2[1-v^2(t)]} + z(t)). \quad (5.5)$$

La dificultad matemática resulta evidente de las ecuaciones que acabo de escribir —a propósito de las cuales diré que tienen que ver con el fenómeno de *aceleración estocástica*, ver Sturrock (1966) y Kesten y Papanicolau (1980)—. En el caso temporal, podía hacer los cálculos, puesto que el ruido sólo dependía de t ; entonces podía sacarlo de la integral, hacerla —los campos son deterministas puesto que la aproximación adiabática me asegura que la forma del *kink* no se ve alterada— y luego promediar. Aquí no es posible seguir estos pasos porque ahora el ruido depende de la variable en la que integro; además, el haber pasado al sistema de referencia del *kink* en reposo complica aún más el cálculo, puesto que ahora el punto dónde tengo que evaluar ξ depende de v . Así pues, no veo ningún camino para sacar algún resultado útil de estas ecuaciones sin hacer aproximaciones drásticas, como las que presentaré en la tercera sección del capítulo. En la que sigue a este párrafo, intentaré resumir la información que he podido obtener de las simulaciones.

5.2 Simulaciones

Las simulaciones del modelo ϕ^4 con estocasticidad espacial fueron llevadas a cabo con el mismo procedimiento ya explicado con detalle en el capítulo 3, cuya fiabilidad considero bastante bien establecida. Desafortunadamente, en el problema que estoy tratando ahora no dispongo de tests tan adecuados como el de la ecuación PMR —que no se puede demostrar por problemas parecidos a los que presentan las ecuaciones adiabáticas—, aunque sí he comprobado al menos la dependencia en el número de realizaciones, encontrando otra vez buen acuerdo entre los resultados obtenidos con promedios sobre

30 y 60 realizaciones. Los tiempos de cálculo son similares a los del caso con fluctuaciones del potencial, y los parámetros —paso espacial, temporal, número de puntos, etc.— son los mismos que en ese estudio previo.

Pasando ya a los resultados de las simulaciones propiamente dichos, comenzaré resumiéndolos en una sola frase: las consecuencias de la introducción de ruido espacial en el sistema son mucho más notorias y graves que aquellas a las que dan lugar las fluctuaciones temporales del potencial. En otras palabras, lo que se observa es que los *kinks* encuentran enormes dificultades para propagarse en el medio inhomogéneo. Otra propiedad de la perturbación temporal que aparecía en los dos capítulos anteriores, la dependencia más o menos suave de sus efectos de la velocidad inicial del *kink*, tampoco está reproducida aquí de forma clara; el cambio de propiedades tiene lugar de forma más brusca. Explicaré a continuación todo esto en más detalle.

Si se puede hablar de ruido débil —luego volveré sobre este punto—, habría que concluir de las simulaciones que su umbral es $2D \sim 10^{-3}$, aproximadamente. Esto se ve en las figuras 5.1 y 5.2, en las que represento las mismas magnitudes de las que me ocupaba en el caso temporal —para los datos iniciales $v_0 = 0.2$, $2D = 0.01$ —. Comenzaré por la figura 5.1 —por claridad de exposición presento ahora primero los resultados de coordenadas colectivas. Incluso valores de ruido tan pequeños como este ya causan efectos bastante visibles en el *kink*: véase si no como se detiene rápidamente y no se propaga muy lejos. En particular, quiero llamar la atención sobre el comportamiento de la dispersión, que crece como t^3 , —el exponente en este caso concreto es 3.4969— es decir, muy deprisa; recalco este hecho porque la dispersión se comporta así para todas las velocidades excepto las ultrarrelativistas, y para casi todos los ruidos. También la velocidad exhibe la huella de la inhomogeneidad, con una dispersión que va como $t^{1.3745}$. En cuanto a la energía, se aprecia que varía de forma errática. De la ecuación del movimiento (5.1), como ya indiqué en el capítulo 3 —Ec. (3.7)—, se puede ver que su variación está dada por

$$\frac{dE}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(x) dx \phi_t (\phi - \phi^3); \quad (5.6)$$

de esta expresión no puedo deducir nada, puesto que, al igual que arriba, ahora el ruido está dentro de la integral. Para ruido débil, se puede pensar que al principio el campo no está muy afectado y sustituirlo por el determinista, lo que conduce a crecimiento medio de la energía nulo. Sin embargo, numéricamente parece que el campo empieza a modificarse muy pronto, con

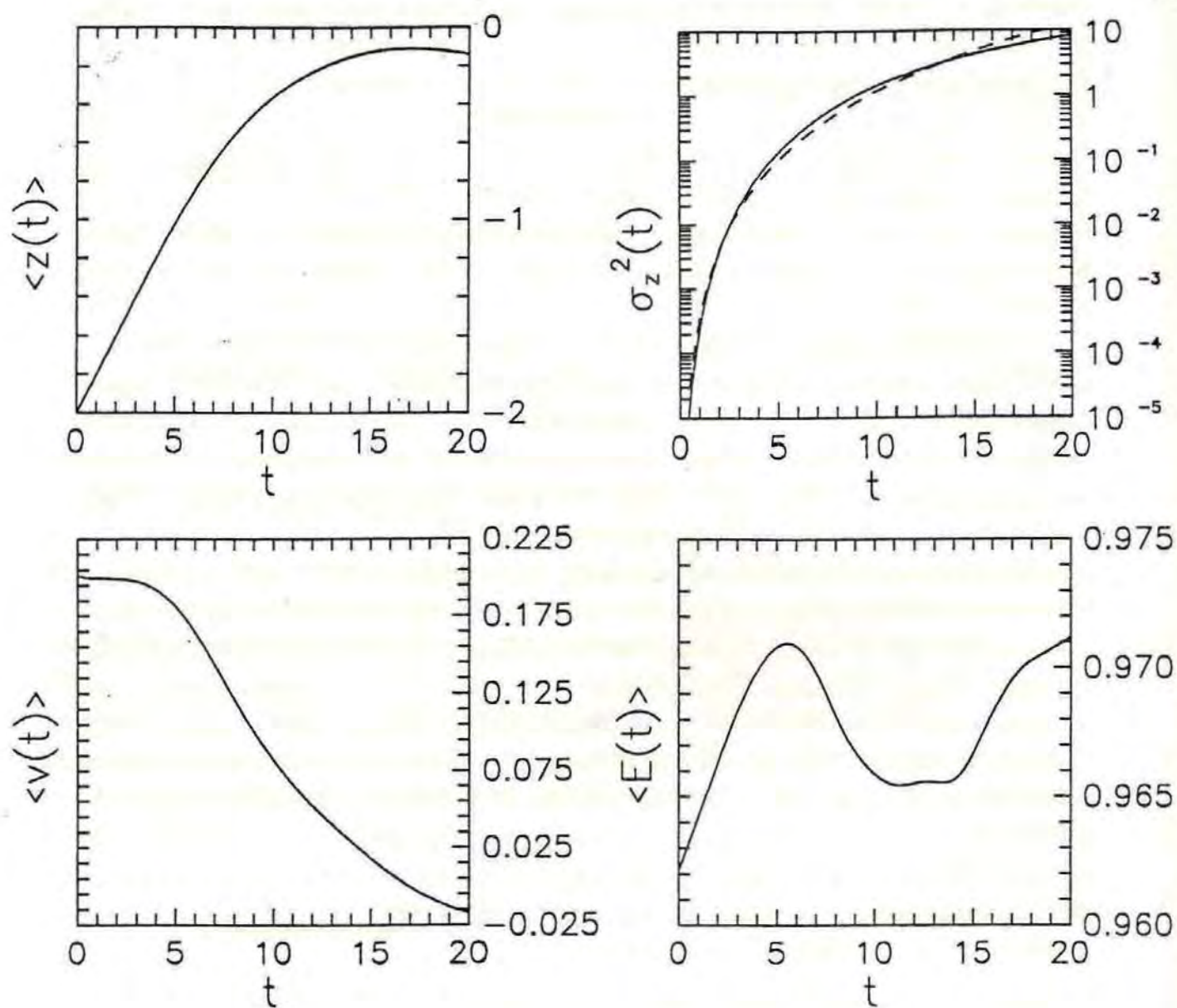


Figura 5.1: *Kink* bajo ruido espacial débil. Coordenadas colectivas

lo que esta idea no es muy válida. Lo que sí se puede decir es que ahora la variación de la energía es mucho menos rápida que en el caso temporal.

Estas últimas consideraciones acerca de la energía me llevan a la figura 5.2 y a hablar de los perfiles del *kink*. En dicha figura se aprecia notablemente a que me refería cuando decía que los efectos del ruido espacial eran mucho más graves que los del ruido temporal. La distorsión que se induce tanto en el perfil del *kink* propiamente dicho como en el de su densidad de energía es tal que el solitón acaba siendo incapaz de propagarse —nótese que en el instante $t = 10$ y en $t = 20$ su centro ocupa más o menos la misma posición, ver también figura 5.1—. La comparación con los resultados de la misma intensidad del ruido, pero temporal —Figs. 3.6 y 3.7— es definitiva. Como también anuncié, sin embargo, si para el ruido espacial incremento su intensidad en un orden de magnitud, el resultado no cambia demasiado —figuras 5.3 y 5.4, igual que antes pero $2D = 0.1$; el ajuste de la dispersión del centro va como $t^{2.9711}$ y el de la dispersión de la velocidad como $t^{0.8264}$ —, excepto si llego a valores en torno a $2D = 1$, que también causan *blow ups* antes de $t=20$. La diferencia más marcada entre ambos casos aparece en la clara asimetría que se puede ver en el perfil del *kink* —Fig. 5.3—; si se estudia con cuidado, también se puede apreciar lo mismo en la figura 5.2. Esta asimetría no es debida a la velocidad, sino que también tiene lugar un respuesta asimétrica por parte de *kinks* inicialmente en reposo, como muestro en la figura 5.5. La razón de que esto sea así es algo que sí he sido capaz de mostrar analíticamente, y la abordaré en la sección siguiente. Concluiré esta descripción diciendo que incluso solitones tan rápidos como los de las figuras 5.6 y 5.7 — $v_0 = 0.8$, $2D = 0.1$; ajustes: dispersión del centro, $t^{2.3114}$, dispersión de la velocidad, $t^{0.6054}$ — “sienten” la acción de la perturbación mucho más que en el caso temporal, si bien son capaces de mantener su propagación durante el tiempo de las simulaciones.

Para cerrar la sección dedicada a las simulaciones, conviene resumir las principales conclusiones que se pueden extraer de ellas, conclusiones que desafortunadamente sólo he podido obtener de manera cualitativa. Los *kinks* se ven muy afectados por el ruido espacial, sin presentar diferencias cualitativas en un amplio rango de intensidades. La sensibilidad a valores iniciales de la velocidad es también pequeña y hay que ir a velocidades cercanas a 1 para encontrar más robustez frente al ruido. Las regiones del sistema que se ven más afectadas son los extremos de la estructura del *kink*, mientras la zona central del mismo parece también ser más resistente. Ello sugiere una clave para entender la física del proceso. Volviendo al punto de vista del modelo discreto, las partículas que tienen más energía cinética son las

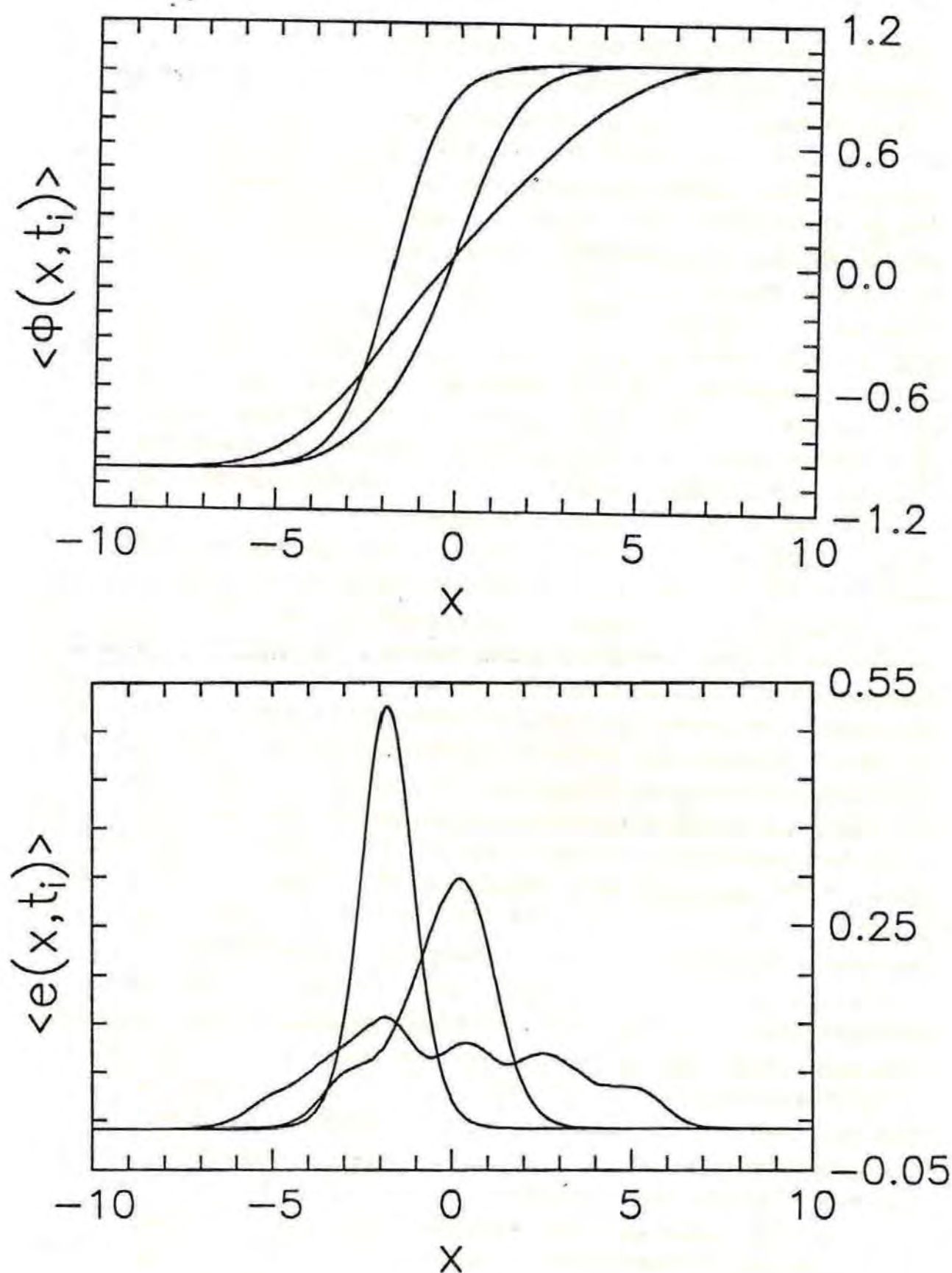
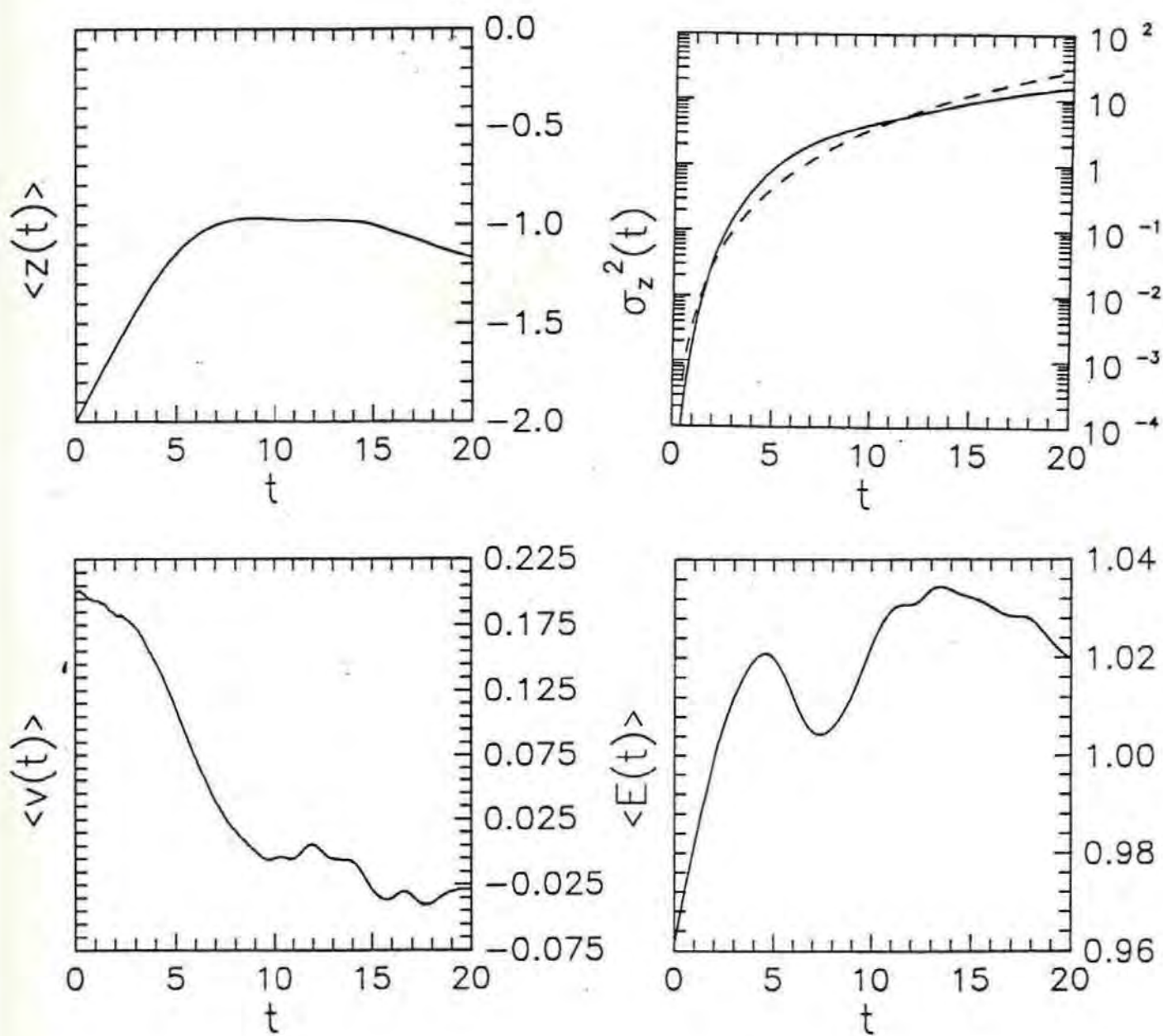


Figura 5.2: *Kink* bajo ruido espacial débil. Perfiles

Figura 5.3: *Kink* bajo ruido espacial fuerte. Coordenadas colectivas

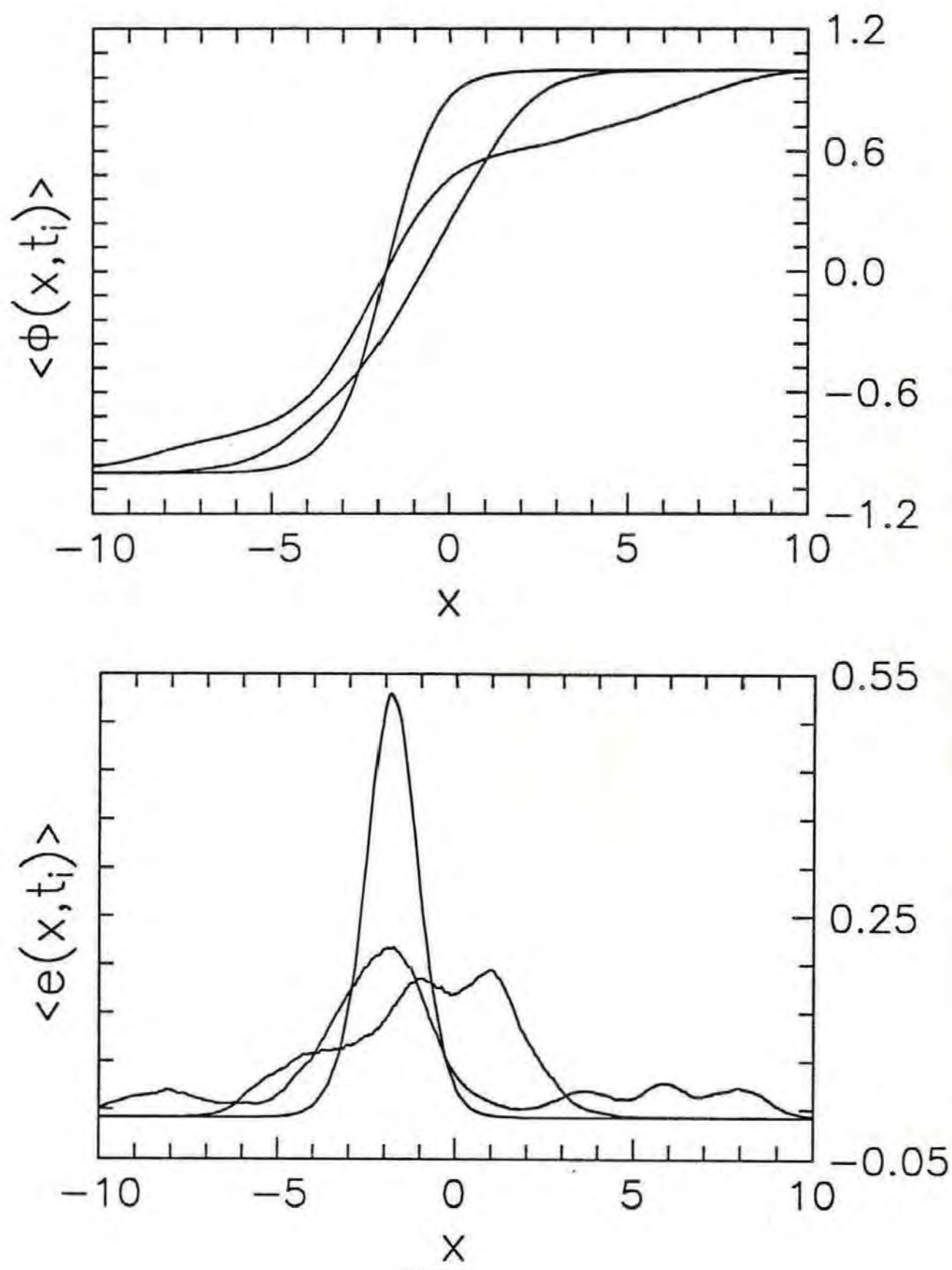
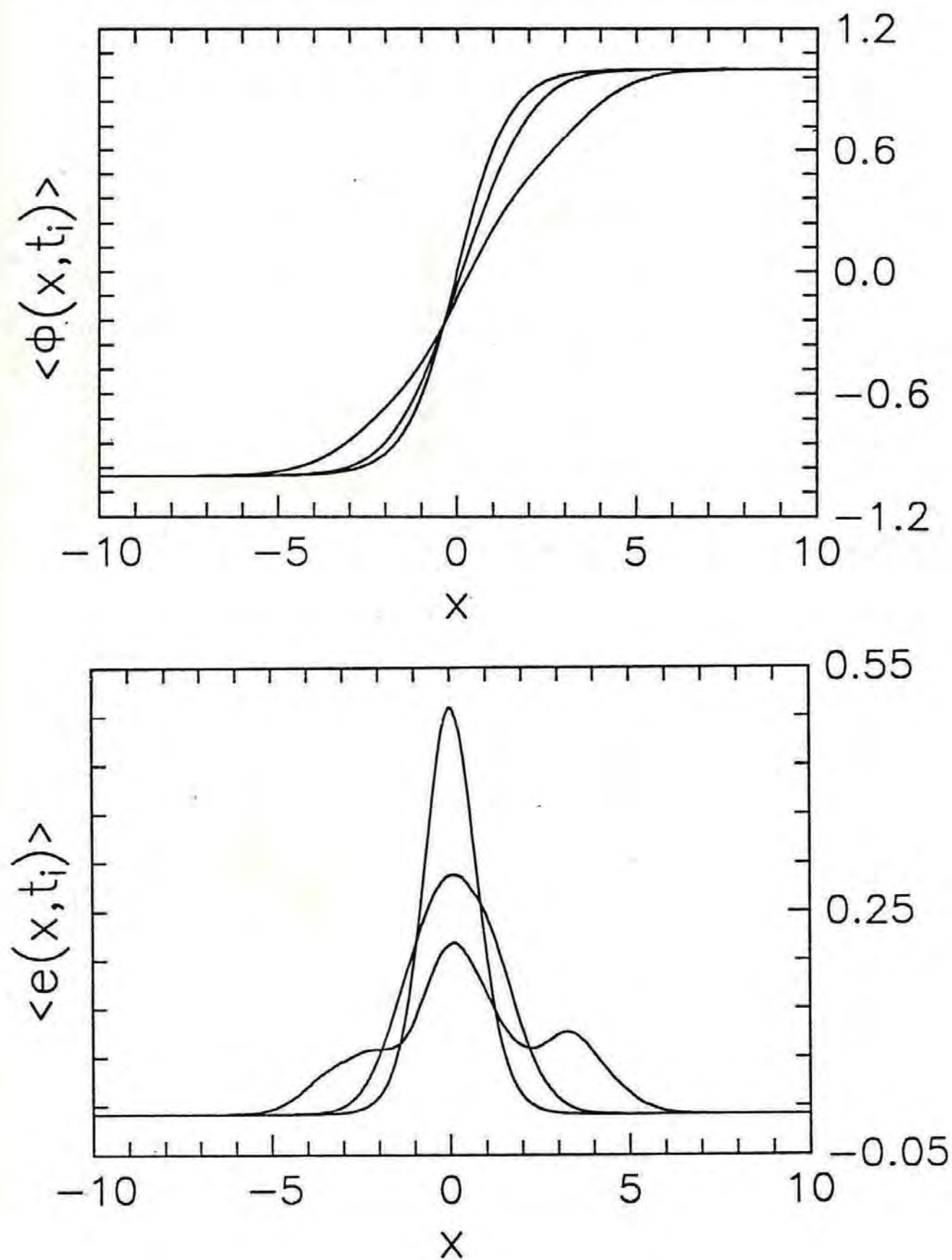


Figura 5.4: *Kink* bajo ruido espacial fuerte. Perfiles

Figura 5.5: *Kink* en reposo bajo ruido espacial fuerte

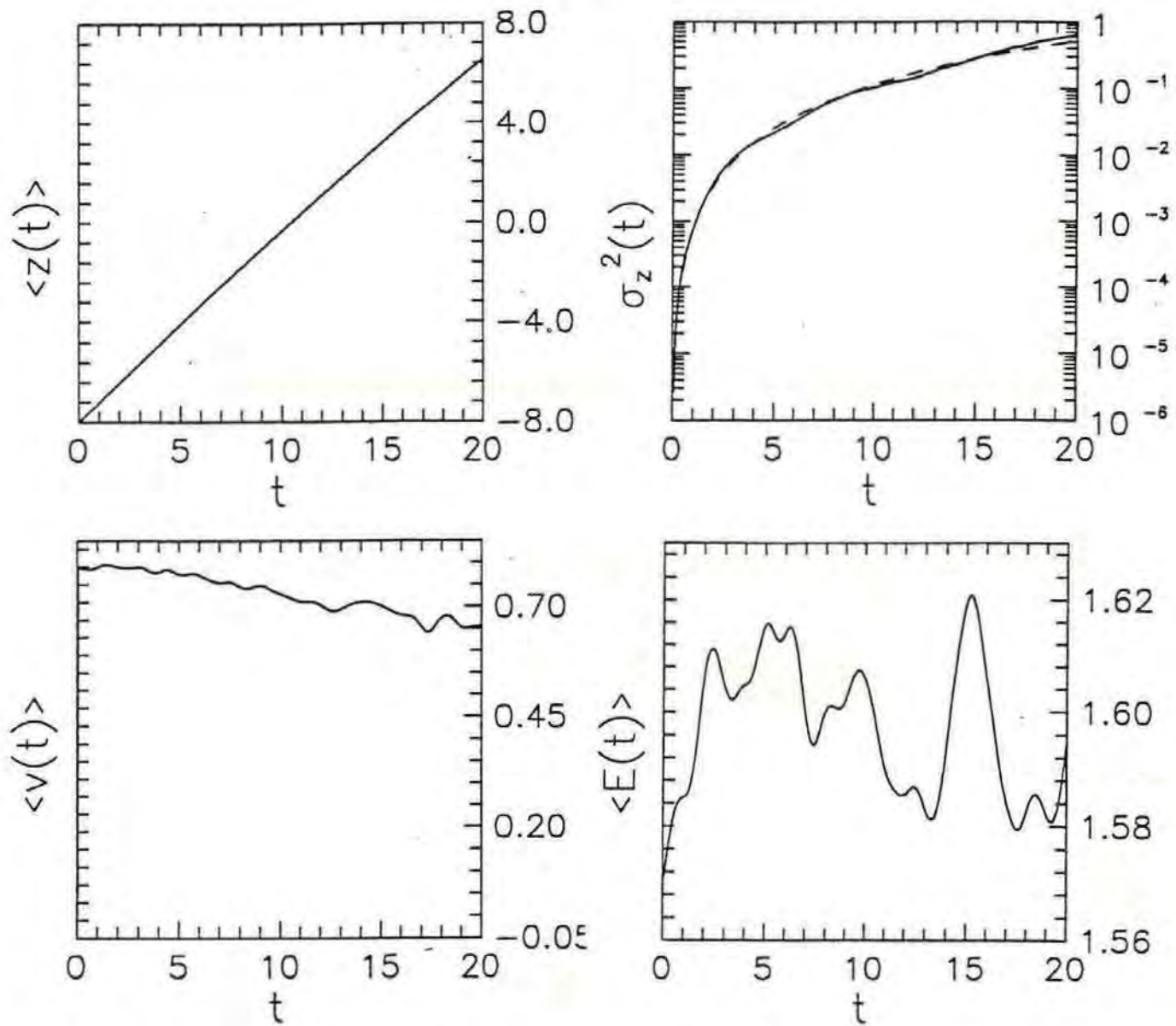
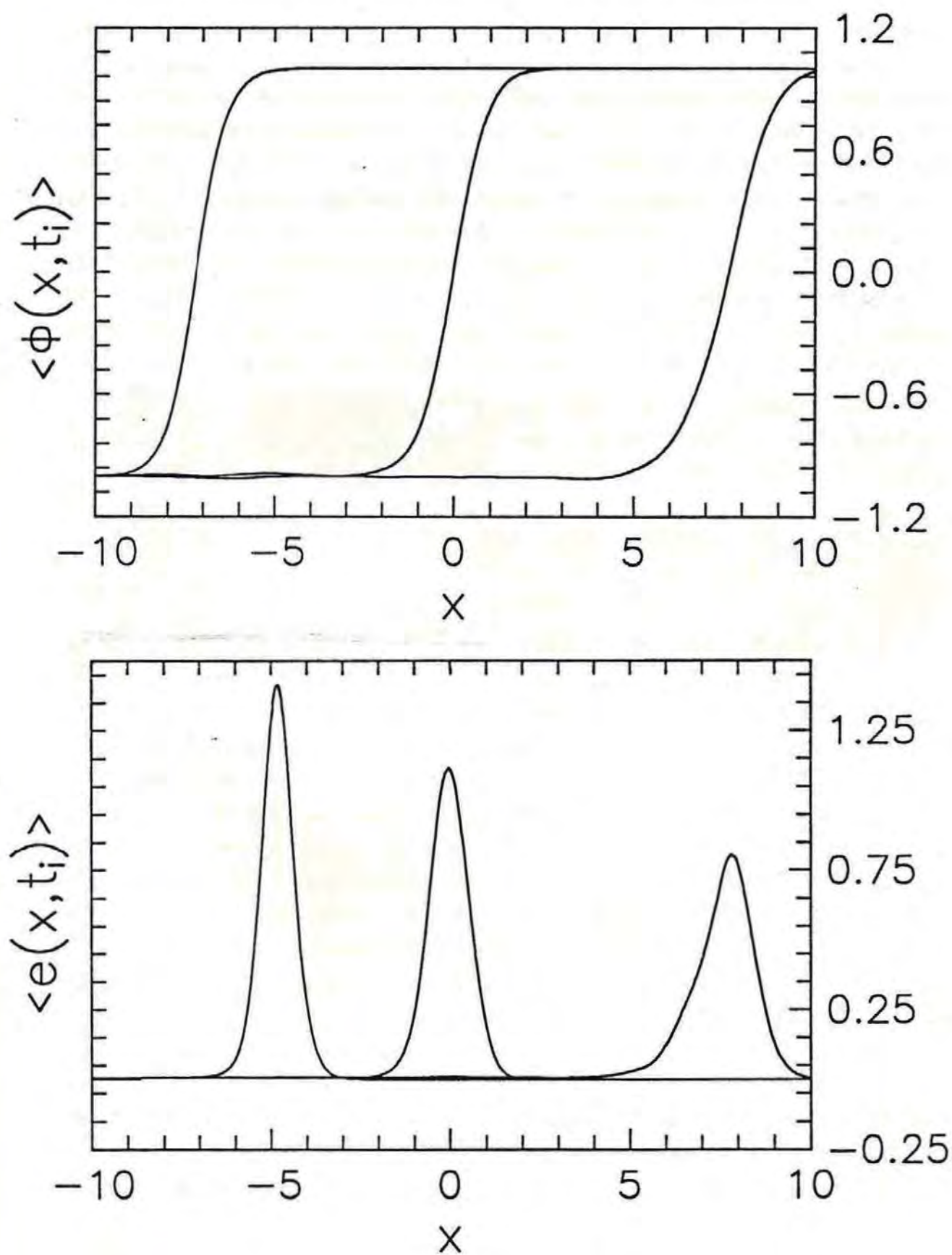


Figura 5.6: *Kink* rápido bajo ruido espacial. Coordenadas colectivas

Figura 5.7: *Kink* rápido bajo ruido espacial. Perfiles

del centro de la estructura, mientras que en los lados, a medida que se entra a las alas del solitón, la energía cinética disminuye. Estas últimas son partículas que están comenzando o terminando su transición de un pozo a otro, y están empezando a moverse o están casi frenadas por completo — todo ello se puede mostrar fácilmente sin más que estudiar el hamiltoniano del sistema, o ver la densidad de energía del sistema continuo—. Parece entonces lógico que éstas se vean más afectadas por variaciones locales del potencial doble pozo que las que están en el centro, las cuales presentan una situación muy inestable y, por así decir, con mucha “inercia” —debida a los acoplos armónicos que tiran de ellas y que no lo hacen casi con las otras, cercanas a su situación de equilibrio—.

El cuadro general —cualitativo, insisto— que creo describe el proceso que tiene lugar en la cadena al establecerse la inhomogeneidad sería que los *kinks* son muy inestables frente a esta perturbación. El mecanismo desestabilizador tendría que ver con las partículas en la estructura del solitón pero cercanas a las alas, que no tienen ni energía cinética ni ayuda del acoplo armónico suficiente para superar la barrera extra que añade el término estocástico. Al no ser capaces de moverse y quedarse clavadas en sus posiciones, en un corto intervalo provocan que las demás partículas se claven también, y que la cadena intente reajustarse de la mejor forma posible a la nueva situación de los potenciales, alcanzando una configuración estática de equilibrio. Tengo entonces la impresión de que la clave del distinto comportamiento frente a perturbaciones espaciales y temporales radica precisamente en la homogeneidad de estas últimas, que afectan a toda la estructura del *kink* por igual, pero además no crean barreras permanentes que claven las partículas lentas y activen el mecanismo desestabilizador; sólo durante instantes aislados —para ruidos pequeños— el *kink* se ve detenido, pero hay otros en los que las barreras son rebajadas. No es así en el caso espacial, y la partícula que encuentra una barrera se ve atrapada: no puede ir adelante porque no tiene suficiente energía y no puede ir atrás porque el acoplo armónico con el centro se lo impide. Finalmente, de aquí también me veo inducido a creer que no hay región de ruido débil —a efectos prácticos, D tendría que ser muy pequeña—, porque aunque la dispersión sea pequeña, en cada realización del ruido habrá pozos en los que el cambio del potencial sea tan grande como uno quiera, y, al menos, como sea necesario para impedir la correcta propagación del *kink*. Como también hay partículas, justo las más cercanas a las alas, que serían de acuerdo al razonamiento anterior, extremadamente sensibles a variaciones *locales permanentes* del potencial, el mecanismo de inestabilización comenzaría casi ineludiblemente.

5.3 Aproximación analítica

Como adelanté al introducir este capítulo, voy a intentar ahora explotar las ecuaciones de la aproximación adiabática para aprender algo más sobre este problema. Las esperanzas, son pocas, sin embargo, puesto que no sólo el sistema (5.3), (5.4) parece francamente insoluble, sino que además la misma aproximación adiabática no debe ser de mucha utilidad vistas las deformaciones drásticas y rápidas a que se ve sometido el *kink* —lo que también sugiere que no es muy interesante gastar CPU en integrar el sistema adiabático numéricamente—. Así las cosas, todo cuanto se puede esperar es obtener alguna información de lo que sucede a tiempos muy cortos y sobre estabilidad de los solitones. En estos dos aspectos concretos sí se puede estudiar algo basándose en el sistema adiabático utilizando las aproximaciones propuestas en el trabajo de Pascual *et al.* (1989), y de ello me voy a ocupar en lo que sigue.

Comenzaré por ocuparme de lo que sucede a tiempos cortos para *kinks* no relativistas, que son los más afectados por el ruido. Mi primera aproximación será entonces linealizar las ecuaciones (5.3) y (5.4) en la variable v , despreciando términos de orden v^2 y superiores. Haciendo eso, el par de ecuaciones se reduce a

$$\frac{dv}{dt} = G(z), \quad (5.7)$$

$$\frac{dz}{dt} = v + v H(z), \quad (5.8)$$

dónde

$$G(z) = - \int_{-\infty}^{\infty} dx \xi(x) g(x-z), \quad (5.9)$$

$$H(z) = - \int_{-\infty}^{\infty} dx \xi(x) h(x-z), \quad (5.10)$$

y

$$g(x) = \frac{3}{4} \sqrt{2} \cosh^{-2}(x) [\phi(x) - \phi^3(x)], \quad (5.11)$$

$$h(x) = \sqrt{2} x g(x), \quad (5.12)$$

y dónde he vuelto a la variable x para tener el ruido con su definición primitiva, en vez de en la coordenada de centro de masas. Cómo se ve, lo que he ganado haciendo la aproximación no relativista es que la dependencia

en v se hace muy sencilla, quedando sólo fuera de las integrales —dentro de ellas sólo intervenía a través de factores γ , y al linealizar $\gamma \simeq 1$ —. Sin embargo, tengo aún un problema complicado puesto que las ecuaciones (5.7) y (5.8) están acopladas y además son integrodiferenciales en z . Más aún, no conozco la posición del campo ϕ en presencia de la perturbación. Aquí es dónde aún puedo hacer una aproximación más, que es la de tiempos cortos: suponer que en un pequeño intervalo de tiempo a partir del instante inicial, el solitón permanece inalterado, es decir, en la misma posición y con la misma velocidad. Para hacer esta aproximación y obtener información de ella, conviene reescribir el sistema (5.7) y (5.8) de otra manera, para lo cual derivo (5.8) una vez más con respecto al tiempo; luego despejo v de (5.8), utilizo (5.7) para dv/dt y llego a

$$\frac{dz^2}{dt^2} = -\frac{dH(z)/dz}{1+H(z)} \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + G(z)[1+H(z)]. \quad (5.13)$$

Redefiniendo entonces el origen de la coordenada espacial de forma que a $t = 0$ se verifique $z(t) = 0$, y sustituyendo para ϕ el solitón de ϕ^4 , se tiene, para la dinámica a tiempo corto, la ecuación

$$\frac{dz^2}{dt^2} = -\frac{dH_k(0)/dz}{1+H_k(0)} \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + G_k(0)[1+H_k(0)]. \quad (5.14)$$

dónde el subíndice k indica que las integrales G y H se evalúan para el *kink* inicial. Evidentemente, puesto que esas integrales contienen el proceso estocástico $\xi(x)$ en su integrando, $H_k(0)$, $G_k(0)$ y $dH_k(0)/dz$ son variables aleatorias. Sus propiedades serán las derivadas de las de ξ , como veré enseguida; ahora lo que haré será escribir la solución de (5.14), que es

$$z(t) = \frac{1}{a} \log \cosh(\sqrt{ab} t), \quad (5.15)$$

$$v(t) = \frac{1}{c} \left(\frac{b}{a}\right)^{1/2} \tanh(\sqrt{ab} t), \quad (5.16)$$

dónde a , b y c son las variables aleatorias

$$a \equiv \frac{dH_k(0)/dz}{1+H_k(0)}, \quad (5.17)$$

$$b \equiv G_k(0)[1+H_k(0)], \quad (5.18)$$

$$c \equiv 1+H_k(0). \quad (5.19)$$

Los valores medios de estas variables aleatorias se calculan teniendo en cuenta, como ya dije, la definición de $\xi(x)$, y se ve fácilmente que

$$\langle b \rangle = 0; \langle c \rangle = 1, \quad (5.20)$$

pero, desafortunadamente, no se pueden hacer predicciones sobre lo que sea $\langle a \rangle$ puesto que involucra un cociente de variables aleatorias —correlacionadas; se demuestra trivialmente que $\langle a_{num} a_{den} \rangle > 0$, siendo a_{num} y a_{den} el numerador y denominador en la Ec. (5.17)—, que puede perfectamente no estar siquiera bien definido, lo que pone un obstáculo insalvable en esta aproximación. Lo único que aún puedo hacer es ver que para los tiempos cortos en los que se supone válido lo que estoy haciendo se ve que

$$t \rightarrow 0 \implies z(t) \rightarrow bt^2, \langle z(t) \rangle \rightarrow 0, \quad (5.21)$$

$$t \rightarrow 0 \implies v(t) \rightarrow \frac{b}{c}t, \langle v(t) \rangle \rightarrow 0, \quad (5.22)$$

sin más que desarrollar en serie a primer orden las expresiones (5.15) y (5.16). El resultado, en todo caso, no es muy sorprendente, y, la verdad, este camino no parece muy fructífero.

A pesar de que no he podido averiguar gran cosa a partir de la aproximación dada por la ecuación (5.13), voy a ver que los resultados se pueden mejorar. Para eso, procedo con el habitual desarrollo perturbativo: supongo que la solución al sistema (5.7), (5.8) es de la forma $z(t) = z_0 t + \epsilon z_1(t) + \epsilon^2 z_2(t) + \dots$, $v(t) = v_0 + \epsilon v_1(t) + \epsilon^2 v_2(t) + \dots$, donde z_0 y v_0 son los parámetros de un *kink* sin perturbar, y ϵ es el parámetro pequeño —la intensidad del ruido, en realidad—. Este desarrollo se introduce en el sistema (5.7), (5.8) y, tomando $z_0 = v_0 = 0$ se ve que la ecuación para la primera corrección es

$$\frac{dv}{dt} = G_k(0) - z_1 \frac{dG_k(0)}{dz} \quad (5.23)$$

$$\frac{dz}{dt} = v_1 + v_1 H_k(0). \quad (5.24)$$

De la ecuación (5.23) para la velocidad del *kink* se aprecia en qué estoy mejorando la aproximación anterior: en vez de sustituir directamente la solución del *kink* sin perturbar, tengo en cuenta una corrección extra que está relacionada con la interacción del centro del solitón con la perturbación.

La solución del sistema que (5.23), (5.24) se puede escribir explícitamente: notando

$$a' \equiv H_k(0), \quad (5.25)$$

$$b' \equiv G_k(0), \quad (5.26)$$

$$c' \equiv \frac{dG_k(0)}{dz}, \quad (5.27)$$

se tiene

$$z_1(t) = \frac{b'}{c'} \left[1 - \cosh \left([-c'(1+a')]^{1/2} t \right) \right], \quad (5.28)$$

$$v_1(t) = \frac{b'}{[-(c')^3(1+a)^{1/2}]} \sinh \left([-c'(1+a')]^{1/2} t \right). \quad (5.29)$$

Al igual que antes, a' , b' y c' son variables aleatorias, pero ahora ninguna está definida como un cociente de otras variables aleatorias, por lo que puedo calcular sus valores medios, que resultan ser

$$\langle a' \rangle = \langle b' \rangle = \langle c' \rangle = 0, \quad (5.30)$$

$$\langle -c'(1+a') \rangle = -\langle c'a' \rangle > 0. \quad (5.31)$$

Esta vez sí he llegado a una expresión que permite extraer consecuencias físicas: las ecuaciones (5.28) y (5.29). De ellas se ve que a tiempos cortos, menores que $-\langle c'a' \rangle$, el centro del *kink* se desplaza una distancia z_1 hacia el lado positivo, lo que coincide con las simulaciones —nótese que si en alguna realización $-c'a'$ se hace negativo el cosh se convierte en cos, menor que uno, con lo que lo que acabo de establecer sigue siendo cierto, ver Ec. (5.28)—. Pero, además, resulta que las correcciones crecen exponencialmente —dejando de tener sentido en poco tiempo— lo que está claramente relacionado con otro fenómeno que ya había indicado al hablar de las simulaciones: los *kinks* son muy inestables, mucho más que para el caso temporal. Cerraré estos intentos de acercamiento analítico con una conclusión negativa: la alta inestabilidad hace ser pesimista en cuanto a la posibilidad de alcanzar algún éxito vía tratamientos perturbativos, que se verán forzosamente limitados a tiempos muy cortos.

III

Desorden Puntual

Interferencia resonante en colisiones *kink*-impureza

“La complejidad del conjunto determina que todo lo que pueda sucederles, a pesar de la experiencia adquirida, resulte auténticamente imposible de prever, y aún más imposible de imaginar. Es inútil tratar de reseñarlo, porque se puede concebir cualquier solución.”

Boris Vian, *El Otoño en Pekin*.

6.1 Introducción

Comienzo aquí la parte de la tesis dedicada al estudio de lo que he agrupado bajo el nombre genérico de desorden puntual. La raíz de este tipo de investigación es antigua: como ya mencioné en el capítulo 2, al reseñar lo que se había dicho hasta ahora, en el primer trabajo sobre ecuaciones no lineales perturbadas, el de Fogel *et al.* (1976, 1977) —que califico de antiguo porque quince años son mucho tiempo en una rama de la física que tiene unos veinticinco—, uno de los problemas estudiados era el efecto de dos funciones tipo delta de Dirac, separadas una cierta distancia. La delta de Dirac es el arquetipo de modelo de impureza puntual, y las distintas formas en que se acople con el campo tienen que ver con la naturaleza del mismo, y por tanto con el sistema del que se trate en sí, además de con el tipo de impureza que se pretenda simular. Se ha trabajado y aprendido mucho de esta clase de perturbación, puesto que permite llegar a resultados explícitos después de largos desarrollos matemáticos, que tienen relevancia física si la escala espacial de la impureza es muy pequeña comparada con las ondas típicas del sistema.

Empero, aunque fue la primera perturbación estudiada, el esfuerzo de los

físicos no lineales ha ido proporcionando mayor cantidad de conocimiento sobre muchas otras perturbaciones que sobre la delta. Así sucede en el caso de disipación, perturbaciones estocásticas, interacciones solitón-radiación, etcétera. Hasta la segunda mitad de los ochenta, por la época en que yo empecé a trabajar en este campo, poco más de lo averiguado hasta 1978 era lo que se sabía sobre el efecto de introducir una delta de Dirac en una ecuación de tipo NKG —y en casi ninguna otra—. Ha sido a partir del desarrollo de la teoría de perturbaciones basada en la Inverse Scattering Transform —y obviamente no a partir de que yo trabaje en esto— cuando se han empezado a acumular resultados sobre este tipo de impurezas. Aunque adelanté algo en la sección 2.3.2, creo interesante resumir aquí lo que se conocía sobre la interacción de solitones con perturbaciones tipo delta en 1985, que era, esencialmente, el trabajo de McLaughlin y Scott (1978). Ellos se beneficiaron de analogía entre solitones y partículas que ya habían observado Fogel *et al.* (1976, 1977) —ver también Kaup y Newell (1978) y Bergmann *et al.* (1983) sobre esta analogía— y fueron capaces de probar que el efecto de la delta sobre el solitón descrito por la ecuación (2.13) con un sólo sumando en el sumatorio, podía considerarse, desde un punto de vista efectivo, como la interacción de una partícula de masa $m = 8$ y posición $x(t)$ —unidades adimensionales como de costumbre— con un potencial efectivo de la forma

$$V_{eff} \equiv 2\mu \operatorname{sech}^2 x, \quad (6.1)$$

en presencia de una fricción —dada por $-8\alpha\dot{x}$ — y una fuerza impulsora externa —de intensidad $2\pi\sigma\gamma$, siendo $\sigma = +1$ y -1 para *kinks* y *antikinks* respectivamente—. La evolución está entonces dada por la correspondiente ecuación de Newton. Es importante observar que el carácter atractivo o repulsivo del potencial originado por la delta no depende más que de la intensidad de esta, y no de que interaccione con ella un *kink* o un *antikink*. De hecho, ambos son capturados por una impureza atractiva si la fuerza impulsora es menor que $(2\gamma/\pi)\sqrt{2|\mu|}$ (McLaughlin y Scott, 1978). Después de este resultado, y en el caso concreto de la ecuación sG, no hubo ningún avance importante hasta los trabajos de Kivshar y Malomed (1988b) y Kivshar *et al.* (1988), que mejoraron la estimación anterior y estudiaron la radiación emitida, tema sobre el que volveré enseguida. La situación es aún peor en el modelo ϕ^4 : no es exagerado decir que, hoy por hoy, no se conoce prácticamente ningún resultado más o menos riguroso. Sin embargo, en principio, no es descabellado pensar que el comportamiento de los *kinks* de ϕ^4 va a ser parecido al de los de sG debido al carácter topológico de ambos, como de hecho ocurre —y se verá más adelante—.

Los cálculos de Kivshar y Malomed (1988b) y Kivshar *et al.* (1988) —habría que mencionar también los primeros intentos relacionados con esta cuestión de Kivshar (1984) y Malomed (1985)— fueron hechos en el marco de la teoría de perturbaciones basada en IST —no voy a discutirla para no extenderme en demasía, y prefiero remitir al lector interesado en los detalles de este tipo de cálculo al excelente *review* de Kivshar y Malomed (1989), dedicado exclusivamente a ella y a los resultados obtenidos hasta la fecha de su aparición—. Es evidente que toda teoría perturbativa tiene un rango de validez limitado que debe estudiarse *a posteriori*, como he hecho en la primera parte con las fluctuaciones del potencial en el modelo ϕ^4 . En el caso de los resultados perturbativos para sG, existían simulaciones numéricas con las que comparar (Sakai *et al.*, 1987). El buen acuerdo entre ambos trabajos es el que dio validez a los cálculos perturbativos. Lo mismo se puede decir de la ecuación NLS, para la que el mismo tipo de tratamiento perturbativo (Malomed 1987a; Kivshar *et al.*, 1987a) tuvo también su confirmación numérica (Qiming *et al.*, 1988a). Desafortunadamente, el modelo ϕ^4 , al no ser integrable, no es asequible a estos procedimientos perturbativos IST, lo cual constituye la causa fundamental del desconocimiento de sus propiedades.

En realidad, he mencionado los sistemas NLS no sólo porque en el siguiente capítulo los resultados que presento los incluyen, sino porque en ellos, el conocimiento de los fenómenos de colisión solitón-impureza va siempre algo por delante del que se tiene de los modelos NKG. Así, fue en la ecuación NLS en la que primero se estudiaron los efectos de interferencia en el *scattering* por impurezas. Por lo expuesto hasta aquí, se puede haber ido adquiriendo la impresión de que los solitones, al menos los topológicos, como se comportan esencialmente como partículas, en realidad *son* partículas. Nada más lejos de la verdad; cuando los solitones interactúan con más de una impureza presente en el medio en que se propagan, aparecen efectos de interferencia típicos de ondas. Esto no debe extrañar a nadie, puesto que los solitones son soluciones de ecuaciones no lineales de evolución de ondas. Así, se puede decir, haciendo una analogía con las partículas elementales, que los solitones también exhiben una cierta dualidad onda-corpúsculo. Este hecho, como decía, se descubrió por primera vez en el sistema NLS, para el que fue predicho teóricamente por Kivshar *et al.* (1987b), que encontraron que el coeficiente de reflexión de un solitón NLS por *dos* deltas dependía notable y oscilatoriamente de la distancia entre ambas deltas —es evidente que la forma más sencilla de analizar fenómenos de interferencia es considerar sólo dos impurezas—. Ellos vieron que la raíz de este fenómeno estaba en

la composición espectral de la emisión de radiación por el solitón inducida por las impurezas. El mismo problema fue considerado numéricamente por Qiming *et al.* (1988a), y sus resultados fueron han sido luego explicados —mediante una ampliación de su teoría previa— por Kivshar *et al.* (1991).

En este capítulo me ocupo del mismo problema, los efectos de interferencia en *scattering* por impurezas, pero para solitones topológicos. Parece natural el que los solitones envolvente, como los de NLS, den lugar a interferencia, puesto que tienen una onda portadora con una frecuencia interna que obviamente experimentará dichas interferencias. Pero, ¿sucede lo mismo con solitones topológicos? Los solitones topológicos tienen una estructura mucho más robusta, unen dos estados fundamentales del modelo, y no parecen “muy ondas”. La suposición conservadora es que el introducir dos deltas no va a aportar nada nuevo, y que volveré a encontrar *pinning* del *kink*, tal vez más eficiente por el efecto cooperativo de ambas deltas. Sin embargo, los solitones topológicos *emiten* ondas al interaccionar con una delta, cómo se ve mediante teoría IST de perturbaciones. ¿Podría eso dar lugar a interferencias? En el mismo trabajo ya citado (Kivshar *et al.*, 1991) se predice teóricamente que sí: cuando se tiene un *kink* lento y la emisión que genera al colisionar con las deltas tiene un pico estrecho, aparece una dependencia oscilatoria del coeficiente de reflexión. La pregunta inmediata es: ¿es esto cierto? Si el cálculo teórico sólo es válido para *kinks* lentos, el potencial efectivo originado por la delta podría atraparlos o repelerlos, dependiendo de que su signo fuera atractivo o repulsivo, con lo que el tratamiento perturbativo quedaría completamente invalidado. Esto es lo que pretendo estudiar aquí, primero para el modelo sG, comparando con el resultado teórico de Kivshar *et al.*, y a continuación para el modelo ϕ^4 , sobre el que no existe ninguna predicción. Una vez más, el estudio lo haré utilizando el medio de que dispongo, y cuya eficacia he comprobado a lo largo de todo este trabajo: la simulación numérica.

6.2 El modelo sG y su simulación

El modelo del que me voy a ocupar en primer lugar es el sG inhomogéneo, con dos impurezas puntuales, descrito por la ecuación

$$u_{tt} - u_{xx} + \epsilon(x) \sin u = 0, \quad (6.2)$$

$$\epsilon(x) \equiv 1 + \epsilon[\delta(x) + \delta(x - D)], \quad (6.3)$$

dónde he escrito el campo como $u(x, t)$ para resaltar el hecho de que ahora voy a trabajar en el modelo sG y no en el ϕ^4 como en los capítulos prece-

dentes. Desde el punto de vista físico, el modelo definido por las Ecs. (6.2) y (6.3) corresponde, por ejemplo, a una unión Josephson larga con inhomogeneidades puntuales, siendo u el flujo magnético normalizado a través de la unión (Barone y Paternó, 1982). Es importante resaltar a este respecto que recientemente este tipo de unión Josephson con impurezas se han construido y estudiado experimentalmente (Golubov *et al.* 1988a, 1988b; Serpuchenko y Ustinov, 1988; Malomed y Ustinov, 1990). El parámetro ϵ está relacionado con la modulación de la altura de la barrera aislante que lleva a una dependencia espacial de la corriente crítica. Esta dependencia se puede modelar, como yo pretendo, por una función delta, si la longitud de la inhomogeneidad es mucho menor que la longitud de penetración Josephson (Golubov *et al.*, 1988a, 1988b). Por último, el parámetro D es la distancia entre impurezas.

Cuando $\epsilon = 0$, el sistema sG homogéneo permite el movimiento uniforme en su seno de *kinks*, cuya expresión ya escribí en la introducción —Ec. (1.14)—, pero que voy a reescribir ligeramente modificada:

$$u_k(x, t) = 4\sigma \tan^{-1} e^z, z \equiv \frac{x - \zeta}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (6.4)$$

En esta ecuación, $\zeta \equiv vt + \zeta_0$ es la coordenada del *kink*, v es su velocidad, y $\sigma = \pm$ es su polaridad. En lo sucesivo tomo sólo $\sigma = +1$ sin pérdida de generalidad, puesto que, como ya expliqué más arriba, la interacción solitón-delta no depende de la polaridad de aquél. En electrodinámica de uniones Josephson, la solución (6.4) de la ecuación sG, Ec. (6.2), describe un cuanto de flujo magnético (Barone y Paternó, 1982) que, de acuerdo a lo que anuncié en la introducción, se acostumbra a llamar por tal motivo *fluxón*.

Mi propósito, de acuerdo a lo expuesto en la sección precedente, es estudiar la influencia del parámetro D —la separación espacial entre las impurezas— en las propiedades de colisión del *kink* (6.4), o, para ser preciso, analizar la dependencia del coeficiente de reflexión del solitón de D . El coeficiente de reflexión del *kink*, R , se define como $R \equiv E_{em}^{(-)}/E_k$, donde $E_k = 8/\sqrt{1 - v^2}$ es la energía de un *kink* con velocidad v , cuando está muy alejado de la región inhomogénea, y $E_{em}^{(-)}$ es la energía emitida hacia atrás en forma de radiación, debido a la interacción con las impurezas. La energía emitida $E_{em}^{(-)}$ se puede estimar —y por tanto el coeficiente de reflexión R — por medio de la teoría IST de perturbaciones para solitones. En el caso que me ocupa, de dos deltas, además de la restricción de velocidades pequeñas de la que ya hablé, hay que imponer lo que se conoce como *aproximación*

de Born, que consiste en asumir que la velocidad del *kink* no cambia durante la colisión. En cuanto a las simulaciones en sí, el estudio numérico que voy a hacer utiliza, como a lo largo de toda la tesis, el esquema de Strauss y Vázquez (1978) para ecuaciones NKG, que ya presenté en detalle en el capítulo 3, por lo que no voy a volver ahora sobre él. Lo que sí quiero resaltar es que este esquema parece particularmente apropiado para un problema como el que me ocupa, en el que es preciso calcular la energía del sistema con mucha precisión; el carácter conservativo del esquema asegura que dispongo de una buena discretización de la energía.

6.3 Resultados y discusión

Antes de describir los resultados numéricos, voy a resumir brevemente cómo se calcula el coeficiente de reflexión del *kink* analíticamente (Kivshar *et al.*, 1991), por completitud. El método está basado en la teoría IST de perturbaciones. Como es bien sabido, la IST fué introducida por Gardner *et al.* (1967), desarrollada esencialmente por Lax (1968), Zakharov y Shabat (1971) y Ablowitz *et al.* (1973). Los detalles de este procedimiento se pueden ver en numerosos libros de texto, pero, por citar alguno, me referiré a los de Dodd *et al.* (1982), o Zakharov *et al.* (1984). La idea básica —tomo la explicación de Kivshar y Malomed (1989)— es representar la ecuación de evolución de que se trate en la forma de un *par de Lax*, es decir dos operadores lineales L y A que verifiquen

$$L_t + [L, A] = 0, \quad (6.5)$$

dónde uno o los dos operadores tienen coeficientes dependientes del campo $u(x, t)$ descrito por la ecuación asociada a tal par de Lax y $[L, A] = LA - AL$ es su conmutador. En otras palabras, dicha ecuación de evolución es la condición de compatibilidad para el sistema lineal

$$L\psi = \lambda\psi, \quad (6.6)$$

$$\psi_t = A\psi, \quad (6.7)$$

dónde λ es el parámetro espectral, en general complejo, y ψ suele recibir el nombre de *función de Jost*. El primer paso para beneficiarse de la IST es resolver el problema directo de *scattering*, es decir, encontrar las autofunciones del problema (6.6), o, de otra manera, encontrar los llamados *datos de scattering*. Se puede ver que existe una correspondencia uno a uno entre la

función $u(x, t)$ que entra a formar parte del operador L y los datos de *scattering*, que, en general, tienen una parte —autofunciones y autovalores— discreta, S_n , donde n indica el número de orden del autovalor, y otra continua, $S(\lambda)$. La evolución temporal de $u(x, t)$ induce la de los datos de *scattering* a través de la ecuación (6.7). La clave de la IST es que esta evolución es trivial, y está gobernada por ecuaciones del tipo

$$\frac{\partial S(\lambda, t)}{\partial t} = i\Omega(\lambda)S(\lambda, t), \quad (6.8)$$

$$\frac{dS_n(t)}{dt} = \Omega_n S_n(t) \quad (6.9)$$

siendo $\Omega(\lambda)$ y Ω_n factores tal vez dependientes del tiempo, que pueden ser incluso nulos —y lo son a veces, caso de KdV—. Así, para resolver el problema de Cauchy para la ecuación subyacente $u_t = F[u]$ —donde u puede ser multicomponente, o sea, vectorial, por lo que el método es aplicable a ecuaciones de orden arbitrario—, primero se encuentran los datos de *scattering* correspondientes a los datos iniciales, luego se calcula $S_n(t)$ y $S(\lambda, t)$ mediante las Ecs. (6.8), (6.9) y por último se reconstruye $u(x, t)$ a partir de éstos —problema inverso de *scattering*—. En todos los casos, el espectro discreto va asociado a soluciones tipo solitón, y el continuo a la radiación.

La base para construir una teoría perturbativa a partir de la IST es que las derivadas variacionales $\delta S/\delta u(x)$ se pueden expresar explícitamente en términos de las funciones de Jost y los datos de *scattering*. Con la ayuda de estas expresiones se pueden generalizar las ecuaciones de evolución (6.8), (6.9) para incluir perturbaciones de la ecuación de u , o sea, cuando el problema considerado es

$$u_t(x, t) = F[u] + \epsilon P[u], \quad (6.10)$$

y se encuentra

$$\frac{\partial S(\lambda, t)}{\partial t} = i\Omega(\lambda)S(\lambda, t) + \epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\delta S(\lambda, t)}{\delta u(x, t)} P[u], \quad (6.11)$$

$$\frac{dS_n(t)}{dt} = \Omega_n S_n(t) + \epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\delta S(\lambda, t)}{\delta u(x, t)} P[u]. \quad (6.12)$$

Si ϵ es pequeño, se puede sustituir la solución sin perturbar $u(x, t)$ y sus funciones de Jost en el lado derecho de este sistema, y obtener así la evolución de los datos de *scattering* en primer orden de perturbaciones. Claramente, este procedimiento puede —en principio— iterarse hasta alcanzar la precisión

requerida. Estas ideas fueron expuestas originalmente por Kaup (1976), Karpman (1977) y Karpman y Maslov (1977, 1978). Finalmente, diré que las cantidades conservadas por la ecuación sin perturbar se pueden escribir en función de los datos de *scattering*, con lo que, en el problema perturbado, se puede encontrar su comportamiento vía las Ecs. (6.11) y (6.12).

Particularizando todo lo anterior para la ecuación sG se encuentran los resultados fundamentales necesarios para calcular los coeficientes de reflexión en los que estoy interesado. La densidad espectral de la energía radiada por está relacionada con la llamada amplitud de *scattering* $b(\lambda, t)$ —esencialmente, una de las componentes de la matriz de monodromía, que es la que liga la base de funciones de Jost con comportamiento libre en $-\infty$ con la base libre en $+\infty$, dicho brevemente— a través de la siguiente relación

$$\varepsilon(\lambda) = \frac{1}{\pi} \left(4 + \frac{1}{\lambda^2} \right) |b(\lambda, t)|^2, \quad (6.13)$$

que es válida si la amplitud de radiación emitida no es muy grande, —equivalentemente si $|b(\lambda, t)|^2 \ll 1$ —, y donde λ es el parámetro espectral, ($0 < \lambda < \infty$), que define el número de onda de la radiación, $k(\lambda) = \lambda - 1/4\lambda$ y su frecuencia, $\Omega(\lambda) = \lambda + 1/4\lambda$. Por otro lado, la evolución de esa amplitud de *scattering* es la que puedo conocer vía teoría IST de perturbaciones, y está dada por

$$\frac{\partial b(\lambda, t)}{\partial t} = i \left(\lambda + \frac{1}{4\lambda} \right) b(\lambda, t) + \epsilon F(\lambda, t), \quad (6.14)$$

dónde

$$F(\lambda, t) \equiv \frac{i}{4(\lambda^2 + \nu^2)} \int_{-\infty}^{\infty} dx R(u_k) \times \quad (6.15)$$

$$\times (\lambda^2 - \nu^2 - 2i\lambda\nu \tanh z) e^{-ik(\lambda)x}, \quad (6.16)$$

siendo

$$\nu \equiv \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+v}{1-v}}, \quad (6.17)$$

y z es la misma que en la ecuación (6.4).

La función $R(\cdot)$ en la Ec. (6.16) representa la perturbación, es decir, los términos en la ecuación (6.2) proporcionales a ϵ . Si ahora asumo que la radiación no existía antes del *scattering*, tengo que poner $b(\lambda, t = -\infty) = 0$, de forma tal que la pérdida radiativa total viene dada por la ecuación (6.13) con $b(\lambda, t = +\infty)$. Entonces, sustituyendo la perturbación de las Ecs. (6.2)

y (6.3) en la Ec. (6.16), puedo resolver directamente la ecuación (6.14) y encontrar la densidad de energía. Desde el punto de vista físico, es más conveniente escribir dicha densidad de energía como función del número de onda k , es decir, $\varepsilon = \varepsilon(k)$. Ello se puede hacer mediante un cálculo sencillo y se obtiene $\varepsilon_2(k)$ —la energía radiada por colisión con las dos deltas, de ahí el subíndice—, como

$$\varepsilon_2(k) = 4\varepsilon_1(k) \cos^2 \left\{ \frac{D}{2v} [kv - \omega(k)] \right\}, \quad (6.18)$$

$$\varepsilon_1(k) = \frac{\pi \epsilon^2}{8v^6} (1 - v^2)^2 \frac{[k - \omega(k)]^2}{\cosh^2[\pi \sqrt{1 - v^2} \omega(k)/2v]}, \quad (6.19)$$

dónde $\omega(k) \equiv \sqrt{1 + k^2}$. La función (6.19) es la densidad de energía correspondiente al proceso de *scattering* por una sola impureza aislada. Entonces, las ecuaciones (6.18) y (6.19) me permiten calcular directamente los coeficientes de reflexión del solitón en ambos casos,

$$R_n = \frac{1}{8} \sqrt{1 - v^2} \int_0^\infty dk \varepsilon_n(-k), \quad (6.20)$$

dónde $n = 1, 2$ representa el problema con una o dos impurezas respectivamente.

Paso ahora a la discusión de la relación entre los resultados analíticos y numéricos, para lo cual creo conveniente describir la forma en la que obtengo los coeficientes de reflexión a partir de las simulaciones. Las condiciones iniciales son las de un *kink* con una cierta velocidad inicial, con su centro suficientemente lejos de la primera delta —situada sin pérdida de generalidad en $x = 0$ —, típicamente a una distancia 5 —adimensional— que viene a ser la anchura total del solitón. La simulación consiste en permitir que el *kink* colisione con las dos impurezas, e ir registrando el contenido de energía de tres zonas: a la izquierda de la primera delta, $x < 0$; entre ambas, $0 < x < D$, y a la derecha de la segunda, $x > D$. Cuando el *kink* ha llegado más allá de la segunda impureza, y la cantidad de energía en el medio es despreciable frente a las otras —como mínimo un orden de magnitud menor, pero normalmente dos o incluso tres ordenes de magnitud menor— se detiene la simulación, puesto que la corrección debida a esa energía en el medio es pequeña. De esta manera, el coeficiente de reflexión se calcula en la forma obvia, como el cociente de la energía a la izquierda de la primera delta sobre la total del *kink*, que se conserva en la simulación y es igual a la inicial.

Los resultados numéricos para dos valores de la velocidad inicial del *kink* —lento y rápido, podría decir—, se muestran en las figuras 6.1 y 6.2. En

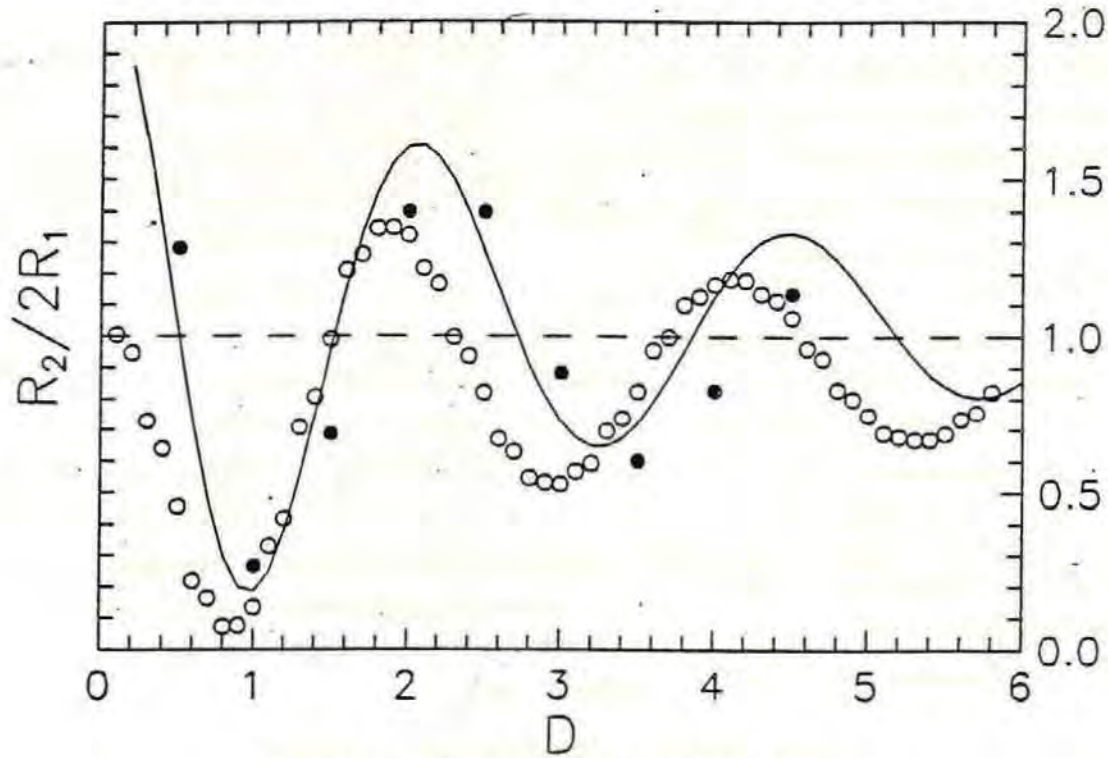
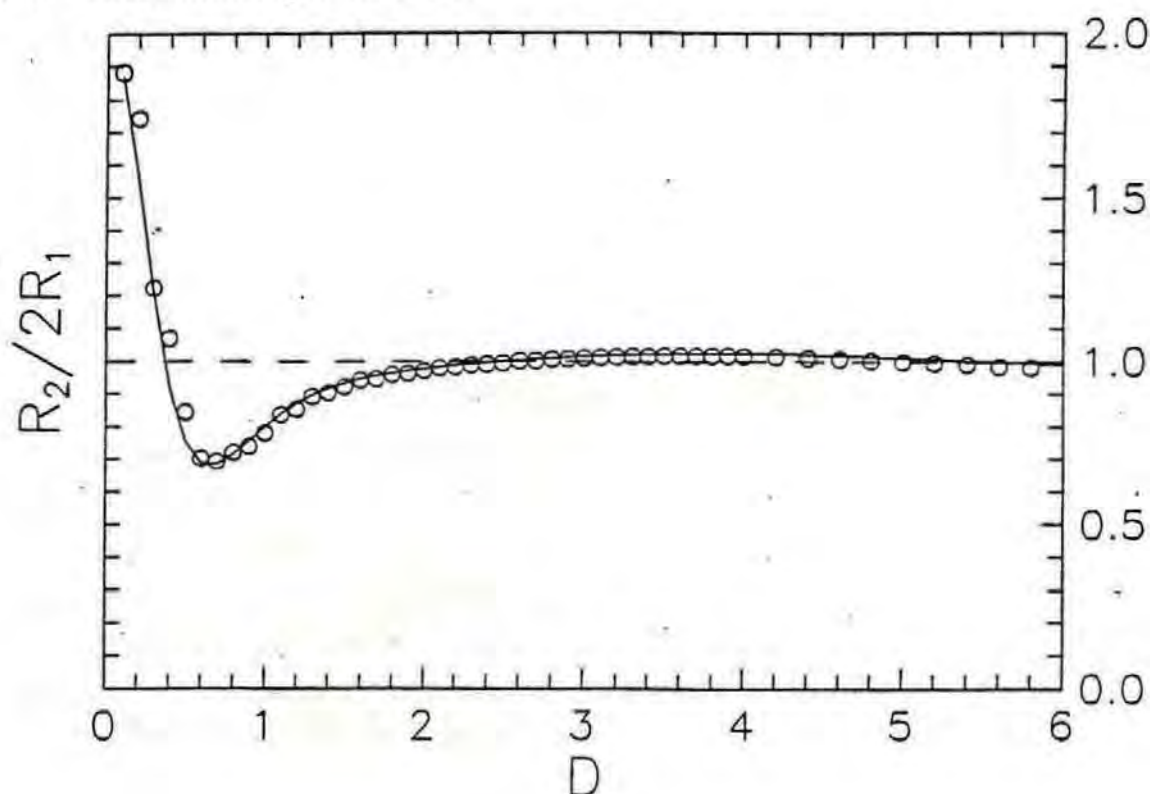


Figura 6.1: Reflexión de un *kink* lento

ellas represento la relación $R_2/2R_1$, que es la más adecuada para mostrar la existencia de efectos de interferencia. Esto es así puesto que, cuando las impurezas están muy alejadas entre sí, o sea, cuando $D \rightarrow \infty$, el coeficiente de reflexión debe tender a la suma del de dos deltas, $2R_1$, y el cociente arriba mencionado debe tender a la unidad. Las diferencias con respecto al valor uno serán debidas a efectos de interferencia. Por otro lado, cuando las dos deltas están tan juntas que se superponen, $D \rightarrow 0$, el coeficiente de reflexión debe tender al de una delta de intensidad doble, que es $2^2 R_1$, y por tanto el cociente $R_2/2R_1$ ha de tender a 2. En la figura 6.1 estudio el problema cuando $v = 0.4$, y además algunos puntos se han calculado dos veces, para impurezas atractivas, $\epsilon = 0.1$ —círculos en blanco— y repulsivas, $\epsilon = -0.1$, —círculos negros—, para comprobar que se cumple la predicción teórica de que los resultados no van a depender del carácter de la impureza —volveré sobre esta cuestión más adelante—. En la figura 6.2 están recogidos los resultados para impurezas atractivas y velocidad $v = 0.9$. En ambas gráficas, la línea continua corresponde a la expresión dada por las ecuaciones (6.18) a (6.20). El fenómeno que he denominado *scattering resonante* aparece muy claro en la dependencia oscilante de la figura 6.1: para ciertos valores de la distancia entre deltas, el sistema es casi transparente al paso del *kink*, mientras que para otros, la reflexión es incrementada respecto a la

Figura 6.2: Reflexión de un *kink* rápido

de contribución de cada delta por separada.

Como puede verse, el acuerdo entre la predicción perturbativa y las simulaciones es muy bueno —en realidad, en la figura 6.2 puede calificarse de excelente—. Las discrepancias aparecen en el caso de velocidad lenta; en particular, la más notoria es que el comportamiento asintótico no es el mismo. Este desacuerdo se puede explicar de manera sencilla y natural. Los resultados analíticos fueron obtenidos bajo la hipótesis de que el *kink* no cambia su velocidad durante el *scattering* o aproximación de Born. Sin embargo, de hecho, después de la colisión con la primera delta, el *kink* pierde parte de su energía cinética, de modo que interacciona con la segunda impureza a una velocidad algo menor, $v - \Delta v$. Por tanto, la relación $R_2/2R_1$ no va a 1 cuando la distancia entre las impurezas va a infinito; por el contrario, verifica

$$\frac{R_2}{2R_1} \rightarrow \frac{[E_{em}^{(-)}(v) + E_{em}^{(-)}(v - \Delta v)]}{2E_{em}^{(-)}(v)}, \quad (6.21)$$

siendo $E_{em}^{(-)}$ la energía reflejada por una sólo impureza. Para entender la diferencia entre $E_{em}^{(-)}(v)$ y $E_{em}^{(-)}(v - \Delta v)$, he analizado la energía emitida para una única impureza frente a la velocidad del *kink*. En este sentido, la figura 6.3 representa esa dependencia calculada analítica —línea continua—

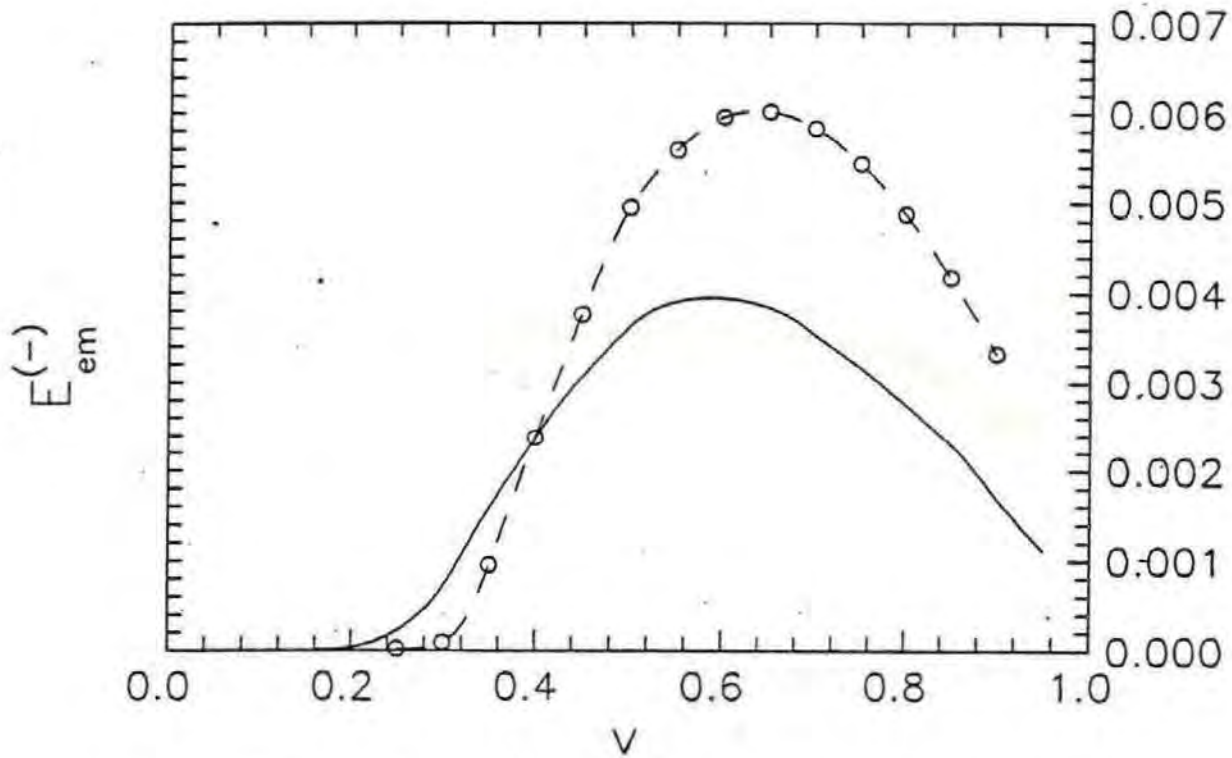


Figura 6.3: Energía emitida tras la colisión con una impureza

y numéricamente —círculos vacíos; la línea de puntos es un ajuste de tipo *cubic spline* (Press *et al.*, 1989)—. En esa figura se ve que cuando la velocidad inicial es $v = 0.4$, $E_{em}^{(-)}(v) > E_{em}^{(-)}(v - \Delta v)$, y como consecuencia el comportamiento asintótico $R_2/2R_1$ calculado numéricamente es siempre menor que la predicción analítica. Esto deja de ser cierto cuando v se hace mayor que $v_{cr} \simeq 0.6$ puesto que en ese rango $E_{em}^{(-)}(v)$ decrece y por tanto $E_{em}^{(-)}(v - \Delta v) > E_{em}^{(-)}(v)$. Así, en la figura 6.2 la asíntota numérica está ligeramente por encima de la línea $R_2/2R_1 = 1$, aunque la diferencia es muy pequeña debido al corto espacio de tiempo que el *kink* necesita para atravesar la distancia D entre deltas, mucho más corta que en el otro caso.

Por lo que se refiere a las discrepancias entre los resultados analíticos y numéricos que aparecen reflejados en la figura 6.3, he de decir que la curva analítica ignora el hecho de que el *kink* puede ser reflejado por la impureza, lo que, por el contrario, es evidente en los resultados numéricos, en los que no aparecen valores para velocidades por debajo de $v \simeq 0.24$ porque en esos casos el *kink* era totalmente reflejado por la impureza. Este valor umbral puede estimarse también analíticamente utilizando una vez más la analogía entre solitones y partículas; recordando que desde ese punto de vista, la delta produce un potencial efectivo dado por la ecuación (6.1), la partícula ha de superar una barrera de potencial 2ϵ ; para ello, ha de tener energía

cinética suficiente, lo que fija el umbral que buscaba por la condición

$$\frac{1}{2}mv_{thr}^2 = U_{max}, \quad (6.22)$$

dónde $U_{max} = 2\epsilon$. Poniendo $\epsilon = 0.1$ y $m = 8$ en la Ec. (6.22) se encuentra $v_{thr} = \sqrt{0.05} \simeq 0.224$, que está en muy buen acuerdo con mi cálculo numérico. Finalmente, la otra discrepancia, relativa a que la curva analítica va por debajo de la numérica, se debe a que en el cálculo perturbativo del coeficiente para una delta también se supone que la velocidad del *kink* no cambia en el proceso, lo que, como ya he dicho, no es cierto. Ese cambio de velocidad produce una cantidad extra de radiación que añadida a la predicha analíticamente produciría el resultado numérico.

El principal resultado numérico —y su correspondiente predicción teórica— pueden explicarse analizando la densidad espectral de la energía emitida por el solitón debido a su colisión con una única impureza. En mi caso, esa densidad espectral viene dada por la Ec. (6.19). Voy a estudiar esa función con más detalle. Para velocidades bajas, $v^2 \ll 1$, la densidad espectral $\varepsilon_1(k)$ tiene un sólo máximo en $k = 0$. Este máximo es bastante estrecho, y su anchura es de orden $2v/\pi \sim v$. Como consecuencia, tal máximo es el responsable de la mayor contribución a la energía emitida, y también de dar lugar a la dependencia resonante. Por ejemplo, aproximando las Ecs. (6.18) a (6.20) cuando $v^2 \ll 1$ se tiene

$$\frac{R_2}{2R_1} \simeq 1 + \frac{1}{(1 + D^2/\pi^2)^{1/4}} \cos \left[\frac{D}{v} - \frac{1}{4} \tan^{-1} \left(\frac{D}{\pi} \right) \right], \quad (6.23)$$

lo que da lugar obviamente al comportamiento oscilante. Por supuesto, esta expresión sólo tiene sentido desde un punto de vista absolutamente teórico, porque debido a la reflexión total la velocidad del *kink* no puede ser menor que v_{thr} en el proceso de colisión.

Por otra parte, si la velocidad es grande, hay dos máximos en $k_{1,2} = \pm k_m$, $k_m = 2v/\pi\sqrt{1-v^2} \simeq (1-v^2)^{-1/2}$. Sin embargo, la función $\varepsilon_1(k)$ no es exponencialmente pequeña en la región $|k| < k_m$, y por tanto, tras promediar sobre todos los números de onda, la dependencia oscilatoria desaparece. De estas consideraciones se deduce que el *scattering* resonante del *kink* es debido a las propiedades espectrales de su emisión, lo que además se comprueba numéricamente.

Un punto que también es interesante discutir, aunque sea brevemente, es el *scattering* del *kink* por inhomogeneidades atractivas, con $\epsilon < 0$ en

la ecuación (6.3). Es fácil ver de las Ecs. (6.18) a (6.20) que la aproximación analítica basada en la aproximación de Born da los mismos resultados, puesto que todas las fórmulas perturbativas son proporcionales a ϵ^2 . Las simulaciones sí muestran, como dije, algunas diferencias, como se aprecia en la figura 6.1. En particular, la energía emitida a través del mecanismo que he descrito es mayor que en el caso repulsivo. Por ejemplo, para un *kink* de velocidad $v = 0.4$ y una sola impureza, la energía emitida es $E_{em}^{(-)} = 2.377 \times 10^{-3}$ con $\epsilon = 0.1$, pero $E_{em}^{(-)} = 3.427 \times 10^{-3}$ con $\epsilon = -0.1$. Esto se puede entender si se tiene en cuenta el hecho de que, para una impureza atractiva, el modelo sG linealizado permite la existencia del llamado *modo de impureza* —a este respecto conviene consultar los trabajos recientes de Braun y Kivshar (1990, 1991) y las numerosas referencias que contienen—. Este modo de vibración de la partícula diferente está localizado en sus cercanías, y viene dado por la expresión

$$u_{im}(x, t) = a \exp\left(-\frac{1}{2}|\epsilon|x\right) \cos \omega t, \quad \omega^2 = 1 - \frac{\epsilon^2}{4}. \quad (6.24)$$

Así, durante el *scattering* el *kink* excita el modo de impureza —a la manera mostrada por Fraggis *et al.* (1989) para el modelo ϕ^4 , modo que cómo ya dije y se desprende de la ecuación (6.24), está localizado en el espacio, siendo importante en la región relativamente extensa $\Delta x \sim |\epsilon|^{-1} \simeq 10$ —del orden de dos veces la longitud del *kink*—. Este modo de impureza da una contribución adicional, aunque pequeña, a la energía radiada calculada en la región $x < 0$, que explica las diferencias entre los casos atractivo y repulsivo.

Para acabar el capítulo, como ya anuncié en la introducción, voy a exponer los resultados que sobre este mismo problema he encontrado para el sistema ϕ^4 . Para este modelo, dada la estructura de la ecuación, hay dos maneras de considerar el acoplo, al igual que en el caso estocástico estudiado en la parte II: lineal y no lineal. El caso no lineal,

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \{1 \pm \epsilon[\delta(x) + \delta(x - D)]\}(-\phi + \phi^3) = 0, \quad (6.25)$$

no presenta prácticamente diferencias con lo que acabo de reseñar para sG, ni para el caso atractivo, ni para el caso repulsivo, que es el que muestro en la figura 6.4. En esa gráfica, en la que los círculos vacíos corresponden a $v = 0.4$ y los llenos a $v = 0.9$, —no hay predicción teórica y la línea es de nuevo un simple ajuste en cada caso— se ve que las estructuras resonantes aparecen de manera análoga y cuantitativamente similar que en sG, tan sólo diferentes en que las oscilaciones son un poco más pronunciadas. Las interpretaciones

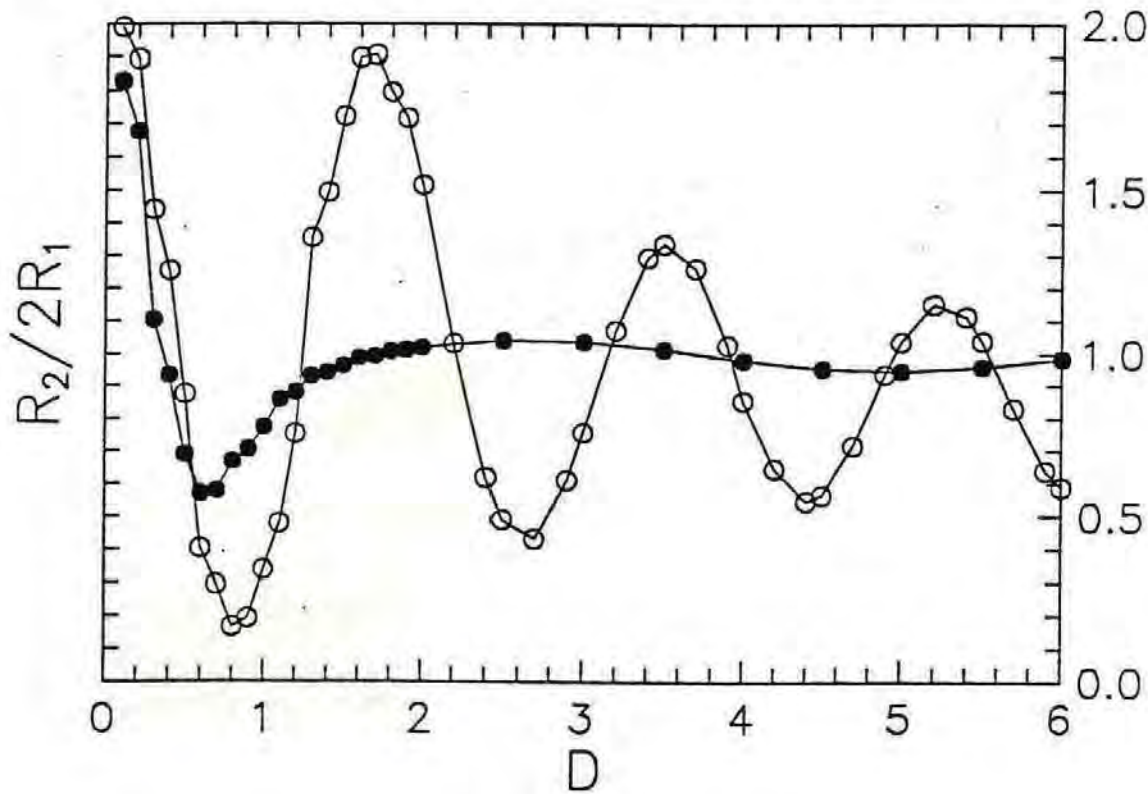


Figura 6.4: Reflexión de *kinks* de ϕ^4 . Acoplo no lineal.

teóricas también son aplicables aquí, casi palabra por palabra, por lo que no me detendré en ellas.

El caso lineal, dado por la ecuación

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} - \{1 \pm \epsilon[\delta(x) + \delta(x - D)]\} \phi + \phi^3 = 0, \quad (6.26)$$

es ya más distinto, y en realidad lo bastante distinto como para que no haya podido dar una justificación tan evidente del fenómeno como en sG o en ϕ^4 no lineal. Los resultados se encuentran en la figura 6.5 y el convenio de símbolos es igual que el anterior. Se aprecia que el comportamiento no tiene mucho que ver con el del problema precedente. Los coeficientes de velocidad $v = 0.4$ que no represento corresponden a casos en que hubo reflexión total del *kink*. Para ver en qué consiste la diferencia que da lugar a comportamientos tan distintos, diré que ahora el acoplamiento de las impurezas con el campo es tal que no da una contribución nula a la energía total cuando el sistema está en el estado fundamental, como pasaba anteriormente. De aquí se ve que, si bien en los problemas sG y ϕ^4 no lineal, la impureza no entraba en juego hasta que el solitón no incidía sobre ella, en el sistema ϕ^4 lineal no sucede así sino que desde el primer instante de la simulación aparece la excitación localizada del modo de impureza, mediante la que el campo intenta reducir su desfavorable situación energética en esa zona. Por esto, la justifi-

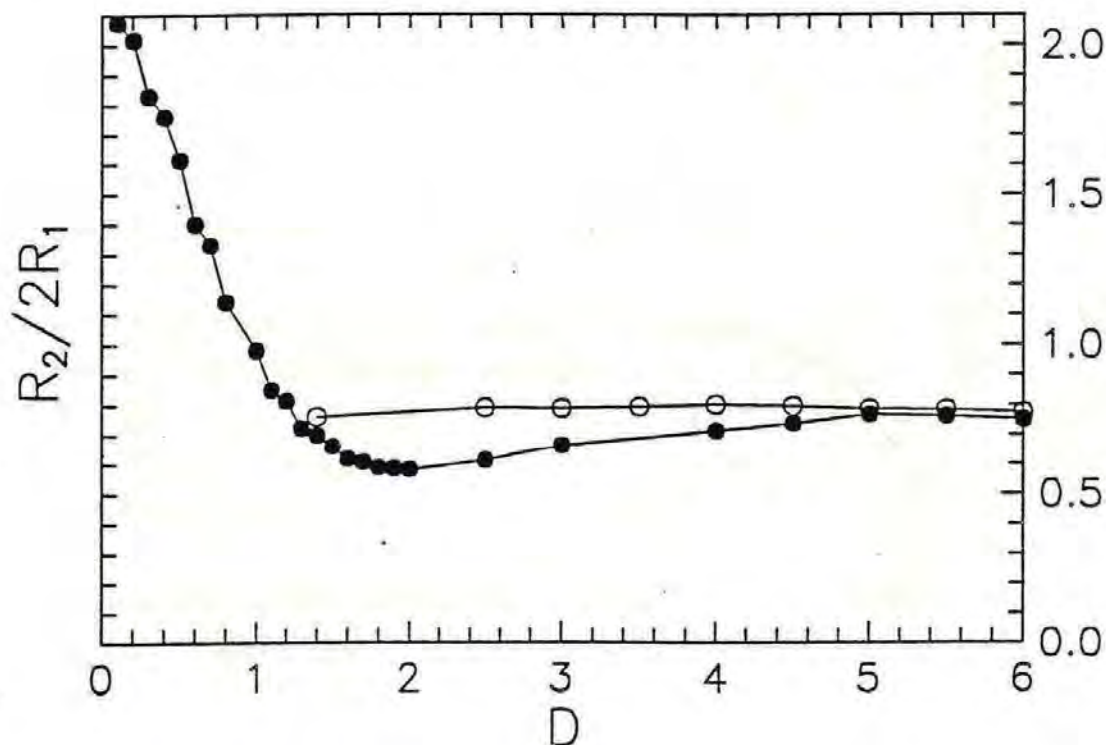


Figura 6.5: Reflexión de *kinks* de ϕ^4 . Acoplo lineal.

cación teórica anterior ya no se aplica aquí, y habría que desarrollar nuevos cálculos, en los que se tuviera propiamente en cuenta la interacción del *kink* con el modo de impureza. Tengo que decir que para hacerlo no es válida la teoría que he expuesto en el capítulo 4, puesto que allí la descomposición se hacía en términos de los modos de excitación del *kink* y no se tenía en cuenta la existencia de un modo de impureza. Para acabar, quiero señalar un factor que complica aún más el problema, y que no es otro que la existencia en este sistema del modo interno, que no se da en el modelo sG, y que también interacciona con el modo de impureza, con el que es capaz de intercambiar energía eficazmente, dando lugar a ventanas de reflexión (Campbell *et al.*, 1991) cómo en las colisiones *kink-antikink* (Campbell *et al.*, 1983), por lo que realmente el problema se hace muy complicado desde el punto de vista del acercamiento teórico, que queda abierto a futuros trabajos.

Excitaciones pequeñas en sistemas inhomogéneos

“A causa de las particulares propiedades que posee el sol en Exopotamia y considerando la naturaleza del suelo, existe el riesgo de que se produzcan notables fenómenos.”

Boris Vian, *El Otoño en Pekin*.

7.1 Introducción

Si en el capítulo anterior me he ocupado de los efectos de interferencia que tienen lugar en la colisión de un *kink* NKG con dos impurezas puntuales, aquí voy a abordar el problema relacionado del *scattering* por una red de tales impurezas, pero, en vez de para *kinks*, para excitaciones de pequeña amplitud —de tipo *breather* en sG, y *breather* débilmente inestable en ϕ^4 —. Este estudio está motivado por varias razones. La primera es, simplemente, que el tratamiento analítico es más sencillo. La segunda tiene que ver con el hecho de que, en principio, este caso es más interesante que el de los *kinks*, puesto que las excitaciones de pequeña amplitud, aún pudiendo ser propiamente solitónicas, como los *breathers* de sG, son menos resistentes, y es de esperar que si pruebo que son capaces de propagarse, se pueda extender esta prueba a *kinks*. Una tercera razón es por afán de generalidad: que como veré en la sección 7.3, los resultados que voy a obtener son válidos también para la ecuación NLS y sus solitones envolvente. Por último, quiero aportar algo a la importante cuestión que se ha ido planteado a lo largo de la segunda mitad de los años ochenta sobre la relación entre localización por desorden y no linealidad. Por este último motivo, antes de entrar en el trabajo propiamente dicho, me parece apropiado dedicar unas pocas páginas

a introducir la ecuación NLS, y clarificar el contexto físico en el que van a tener relevancia mis resultados, de forma que se justifique plenamente el estudiar la propagación de excitaciones NKG pequeñas.

7.2 La ecuación de Schrödinger cúbica

7.2.1 Generalidades

La ecuación de Schrödinger no lineal o cúbica, que ya escribí en la sección 1.2, Ec. (1.5), recibe tal nombre por tener la misma estructura que la ecuación de Schrödinger usual, salvo porque el potencial depende de la densidad de probabilidad. No se debe deducir por ello que la ecuación NLS tenga una relación especial con la ecuación básica de la Mecánica Cuántica ni ningún significado en ese contexto. Esto es aún más así porque cada día parece más establecida la linealidad de los fenómenos cuánticos. Sin embargo, sí juega un papel primordial como ecuación de evolución clásica en muchas situaciones físicas, concretamente en sistemas dispersivos en los que no interviene la disipación, cuando se está interesado en el estudio de ondas de pequeña amplitud o solitones envolvente.

La ecuación NLS se deriva del Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{i}{2}(\phi\phi_t^* - \phi^*\phi_t) + |\phi_x|^2 - |\phi|^4 \right], \quad (7.1)$$

y su solución más importante, que ya presenté, es el solitón envolvente biparamétrico dado por la ecuación (1.15). Es la solución más importante pese a que la ecuación (1.5) también permite la propagación de ondas planas no lineales, porque estas últimas son inestables —al contrario de lo que sucede en las ecuaciones NKG, en las que hay ondas planas y son estables—, debido a los efectos de bandas de frecuencia próximas a la suya. Esta es la llamada *inestabilidad de Benjamin-Feir* (Benjamin y Feir, 1967; Benjamin, 1967), que tiene como consecuencia el que las ondas lineales decaigan a objetos no lineales y localizados, como paquetes de ondas no lineales o solitones. De ahí que los solitones desempeñen el papel más importante en la ecuación NLS como sus soluciones fundamentales.

La ecuación NLS es integrable, lo que fue demostrado por vez primera por Zakharov y Shabat (1971). Su trabajo fue muy importante, porque el par de Lax que ellos propusieron para resolver la ecuación NLS via IST fue luego generalizado de tal forma que incluyera como otros casos particulares las

ecuaciones KdV, mKdV y sG, constituyendo la llamada *jerarquía AKNS* —de las iniciales de sus autores, Ablowitz, Kaup, Newell y Segur (1973, 1974); ver también Dodd *et al.* (1982)—. En este punto es obligado mencionar un trabajo reciente de Balakrishnan (1985), en el que este formalismo se extiende a una cierta clase de ecuaciones NLS perturbadas que aparecen al estudiar modelos de Heisenberg clásicos en el límite continuo —un problema muy distinto del ejemplo que ponía concerniente a KdV en la introducción, porque es plenamente significativo desde el punto de vista físico y no un problema matemático a secas—.

Por lo que respecta a su aplicación en problemas físicos, la ecuación NLS aparece en gran número de aplicaciones y de distintas maneras —ver, por ejemplo, Tappert y Varma (1970), Dodd *et al.* (1982), Remoissenet (1986, 1989), o Spatschek (1987)—. Los campos en los que el uso de la ecuación NLS como modelo ha tenido más éxito son esencialmente dos: física de plasmas, más específicamente, propagación de ondas Langmuir en plasmas (Ichikawa *et al.*, 1972; Shimizu y Ichikawa, 1972; Fried y Ichikawa, 1973) —un buen *review* es el de Spatschek (1987)—, y óptica no lineal, en la descripción de la auto-modulación y el auto-enfoque de la luz en medios no lineales de tipo Kerr o de índice de refracción dependiente de la amplitud del campo eléctrico (Chiao *et al.*, 1964; Kelley, 1965), especialmente en fibras ópticas —aplicación en la que el papel de las variables x y t está intercambiado, ver Hasegawa y Tappert (1973a, 1973b), Mollenauer y Stollen (1984), Haus e Islam (1985); ver también la monografía de Hasegawa (1988)—. Además de en estos temas, la ecuación NLS es útil también en teorías tipo Ginzburg-Landau de superconductividad (de Gennes, 1966), ondas no lineales de superficie en dieléctricos y semiconductores (Goretsveig *et al.*, 1990; Kivshar, 1991a), solitones de Davydov (Davydov, 1985), modos de flexión de láminas delgadas (Wu *et al.*, 1987) u ondas de superficie en líquidos (Denardo *et al.*, 1990). También está relacionada con sistemas discretos como retículos atómicos (Tsurui, 1977), cadenas magnéticas (Lakshmanan, 1977; Coronas, 1977), redes eléctricas (Muroya *et al.*, 1982), o redes de dos componentes (Yajima and Satsuma, 1979; Pnevmatikos *et al.*, 1986).

7.2.2 Problemas de Schrödinger lineales: localización

Aunque como ya he dicho, la ecuación NLS no tiene nada que ver con los problemas cuánticos descritos por operadores de Schrödinger lineales, el estudio del efecto del desorden sobre ambas clases de sistemas está realmente

muy relacionado. Por eso, creo necesario dedicar un par de párrafos a la ecuación de Schrödinger lineal. Sobre ella se ha trabajado mucho desde el punto de vista de las propiedades de transporte electrónicas en Física de Materia Condensada —ver, por ejemplo, los libros de Ziman (1979) y Economou (1983), o los *reviews* de Thouless (1974) y Lee y Ramakrishnan (1985)—. El concepto fundamental para entender los fenómenos que ocurren a los electrones en sistemas desordenados es el de *localización* (Anderson, 1958). En su hoy famoso trabajo, Anderson mostró que los estados electrónicos correspondientes a la zona central de cada banda deben estar localizados —es decir, su densidad de probabilidad de presencia debe decaer exponencialmente con la distancia a un cierto punto, siendo proporcional a $\exp(-x/L)$ — si la energía de los estados atómicos individuales varía al azar en un intervalo algo mayor que el ancho de la banda producida por la superposición de orbitales atómicos adyacentes. En otras palabras: si el desorden es lo bastante fuerte —“lo bastante desordenado”—, los electrones son incapaces de moverse libremente y permanecen localizados en una región de un cierto radio o *longitud de localización* —el exponente L —. Este resultado se puede demostrar en una versión aún más fuerte si se restringe a una sola dimensión espacial: todos los modos normales y autofunciones de una cadena lineal desordenada —a poco que lo esté— están localizados (Mott y Twose, 1961; Makinson y Roberts, 1962), una propiedad que se prueba además para todos los tipos de excitaciones y todos los modelos *standard* de desorden (Matsuda e Ishii, 1970). En los últimos años, la investigación sobre este problema que, matemáticamente hablando, no es otro que el de buscar el espectro de operadores autoadjuntos aleatorios, se ha beneficiado mucho de la interacción entre especialistas en análisis estocástico y teoría cuántica. Así, se han podido obtener resultados concernientes a los valores de la energía accesibles a una partícula, sus estados estacionarios, evolución temporal, y varias propiedades de transporte —ver *reviews* en Kirsch (1985), Sinai (1987), y Lifshitz *et al.* (1988)—.

A pesar de toda esta investigación, la pregunta paralela relativa a la localización de *ondas clásicas*, o sea, si son las ondas clásicas capaces de propagarse en medios desordenados o por el contrario son atenuadas por el desorden, ha sido objeto de estudio sólo en los últimos años. Hay algunas obras clásicas (Chernov, 1960; Barabanenkov *et al.*, 1971) pero realmente el crecimiento del trabajo en el campo es reciente —ver, por ejemplo, Lifshitz *et al.* (1988), o Economou (1990), y las referencias que contienen; ver también el extenso *review* de Freylikher y Gredeskul (1991)—. Esto, ya sorprendente de por sí, lo es aún más si uno se da cuenta del gran número de aplicaciones

prácticas de este problema, en campos como Geofísica, Comunicaciones, Óptica, etcétera. Es de suponer que estos problemas suscitarán aún más investigaciones en el futuro.

7.2.3 Problemas de Schrödinger no lineales

En lo tocante a los sistemas de Schrödinger no lineales, en los que se enmarcan los resultados que voy a presentar a continuación, el trabajo se ha venido planteando sobre todo con la intención de entender la influencia de la no linealidad en las características del sistema lineal, y concretamente, con la pregunta de si la no linealidad cambia o no las propiedades de localización. El primer intento en esta dirección fue el Devillard y Souillard (1986), que estudiaron el problema en el que un intervalo no lineal desordenado se encuentra entre zonas lineales ordenadas, y buscaron sus soluciones estacionarias, de la forma $\exp(i\omega t)f(x)$. La elección de este denominado *modelo semilineal* les permitió partir de ondas lineales en los extremos y tratar de calcular los cambios en la transmisión debidos a la parte central no lineal. En esta parte, el potencial consistía en una función constante a trozos, en pasos de altura y longitud aleatorios. Su enfoque fue muy matemático, y mediante él fueron capaces de demostrar varios resultados interesantes, que compararon por otro lado con simulaciones numéricas. La conclusión más transcendental de su trabajo es que el problema es diferente dependiendo de la forma en que se elijan las condiciones de contorno. Esto quiere decir que los problemas en los que la incógnita es el coeficiente de transmisión para una cierta potencia de entrada —*problema de input fijo*— por una parte, y en los que la incógnita es el mismo coeficiente pero para una cierta potencia de salida requerida —*problema de output fijo*— por otro, no son en absoluto equivalentes. Muy al contrario, en aquél, el coeficiente de transmisión decae exponencialmente con la longitud de la zona no lineal, mientras que en éste, lo hace como una ley de potencia, que encontraron numéricamente y resultó ser simplemente $1/L$.

El siguiente ataque a este problema fue el de Douçot y Rammal, que dedicaron a ello una *letter* (1987a) y dos artículos bastante extensos (1987b), el primero de los cuales está dedicado a ilustrar la compleja técnica que utilizan aplicándola al caso lineal. El potencial que ellos eligieron fue un ruido blanco gaussiano; para este caso, desarrollaron una aproximación bautizada como *aproximación de embedding*, que no voy a describir aquí, pero que les permitió ver que la transmisión de ondas lineales decaía como $L^{-\alpha}$, con $1 < \alpha < 2$, en el problema de *output fijo*. Además, demostraron que podía

haber *multiestabilidad* en el problema de *input* fijo; es decir, el mismo *input* podía dar lugar a varios *outputs* diferentes.

Finalmente, el mismo problema semilineal ha sido recientemente considerado también por Knapp *et al.* (1989), desde un punto de vista más semejante al de la Óptica, con un potencial estacionario, acotado y de media nula. Su investigación consistió esencialmente en desarrollar un programa exhaustivo de simulaciones, con lo que pudieron describir los diferentes comportamientos del coeficiente de transmisión en función de los parámetros del problema.

Así las cosas, cuando escribo esto, el panorama no está muy claro en cuanto al modelo semilineal, y muchas cuestiones están totalmente abiertas. ¿Y el problema totalmente no lineal? Hasta dónde yo sé, aparte de los resultados que voy a presentar, sólo ha habido otros dos grupos que hayan estudiado tal problema. En primer lugar, Qiming *et al.* (1988b) lo abordaron como extensión del que ya he citado (Qiming *et al.*, 1988a) en el que trabajaban sobre una red anarmónica. Lo que hicieron para ampliarlo fue llevar a cabo simulaciones numéricas incluyendo anarmonicidades cúbica y cuártica, con lo que su sistema permite la propagación de ondas de pequeña amplitud descritas muy exactamente por la ecuación NLS. En tal sistema, consideraron un segmento de cadena con desorden isotópico, o sea, las partículas en ese segmento tenían una cierta masa con probabilidad p y otra diferente con probabilidad $1 - p$. Lo que encontraron fue que el coeficiente de transmisión, que en este modelo no lineal hay que definir como hice en el capítulo 6 en función de las energías en cada zona, decrecía como $L^{-1/2}$, salvo para cadenas no demasiado largas y exclusivamente con anarmonicidad cúbica exclusivamente, para las que lo hacía como $L^{-3/2}$ —a partir de una cierta longitud el comportamiento era el anterior—. Ellos estudiaron analíticamente este fenómeno en dos casos límite: en primer lugar, en el de *colisiones independientes*, en el que yo voy a trabajar también, y en el que se supone que la concentración de impurezas es pequeña; por tanto las distancia media entre ellas es grande, mucho mayor que el tamaño del solitón, lo que como hemos visto en el capítulo anterior permite despreciar efectos de interferencia —allí me referí al caso de *kinks* NKG, pero recuerdo que existe el mismo tipo de cálculo analítico para NLS (Kivshar *et al.*, 1987d), validado por las simulaciones de Qiming *et al.* (1988a)—, y con esa aproximación reprodujeron analíticamente el comportamiento $T^{-1/2}$. El otro límite que estudiaron fue la aproximación lineal, que es válida en sistemas muy largos, y también en este caso encontraron el mismo resultado, lo que les forzó a concluir que paquetes de ondas lineales y solitones se comportan

aproximadamente igual.

El otro grupo que se ha dedicado a este problema fue el de Caputo *et al.* (1989), que estudiaron numéricamente la discretización Ablowitz-Ladik, Ec. (1.12), del sistema NLS. Su dato inicial eran ondas lineales que enviaban contra una porción desordenada del sistema. Así, descubrieron que su desestabilización —un proceso similar ha sido descrito por Peyrard y Bishop (1990) y Kivshar (1991a)— ocurría mucho más deprisa que en sistemas homogéneos, evolucionando hasta transformarse en un grupo de solitones, lo que tenía el efecto de mejorar considerablemente las propiedades de transmisión del sistema. Como se ve, también es mucho lo que queda por hacer en este campo, y a él pretende hacer alguna aportación lo que sigue.

7.3 Derivación de la ecuación NLS

Para empezar con los cálculos y resultados propiamente dichos, lo primero que he de hacer es mostrar cómo las excitaciones de pequeña amplitud y tipo envolvente de los sistemas NKG se describen muy aproximadamente por una ecuación NLS. Para ello, voy a partir de la ecuación ϕ^4 , en el bien entendido de que el mismo procedimiento aplicado a sG conduce al mismo resultado —basta desarrollar Taylor el término en $\sin U$, suponiendo $U \ll 1$, y quedarse a términos de orden cúbico—, que ahora escribo, cambiando notación una vez más para ocuparme de otro tipo de onda, como

$$U_{tt} - U_{xx} + \omega_0^2 U - \beta U^3 = 0, \quad (7.2)$$

siendo ω_0 la frecuencia en el límite lineal. En el marco de esta ecuación, voy a considerar los efectos del desorden relacionado con cambios de frecuencia, en la forma de impurezas puntuales de intensidades ϵ_n y posiciones aleatorias x_n , es decir,

$$\omega_0^2 \longrightarrow \omega_0^2 + \epsilon(x), \quad \epsilon(x) \equiv \sum_n \epsilon_n \delta(x - x_n). \quad (7.3)$$

Con este cambio, la Ec.(7.2) se transforma en

$$U_{tt} - U_{xx} + \omega_0^2 U - \beta U^3 = -\epsilon(x) U. \quad (7.4)$$

Como he dicho, a continuación me intereso por las propiedades de ondas de pequeña amplitud y de tipo envolvente, lo que se traduce en buscar soluciones dadas por expresiones como

$$U(x, t) = \tilde{u}(x, t) e^{i\omega_0 t} + \tilde{u}^*(x, t) e^{-i\omega_0 t}. \quad (7.5)$$

Mediante este *ansatz*, separo la dinámica del sistema en oscilaciones relativamente rápidas de frecuencia ω_0 , y una envolvente que varía de manera más lenta, $\tilde{u}(x, t)$. Sustituyendo la Ec. (7.5) en la Ec. (7.4) se tiene, en el orden más bajo de oscilaciones, la ecuación —ver por ejemplo el libro de Newell (1985)—

$$\tilde{u}_{tt} + 2i\omega_0\tilde{u}_t - \tilde{u}_{xx} - 3\beta|\tilde{u}|^2\tilde{u} = -\epsilon(x)\tilde{u}. \quad (7.6)$$

Basta asumir ahora que la envolvente \tilde{u} varía lo bastante despacio para que se verifique $\tilde{u}_{tt} \ll \omega_0\tilde{u}_t$, con lo que, despreciando el término en derivada segunda y reescalando, se encuentra la ecuación NLS para la envolvente adimensionalizada

$$iu_\tau + u_{xx} + 2|u|^2u = \epsilon(x)u, \quad (7.7)$$

dónde

$$\tau = -t/2\omega_0, \quad u = \sqrt{\frac{3\beta}{2}}\tilde{u}, \quad (7.8)$$

y $\epsilon(x)$ sigue estando definido por la Ec. (7.4).

7.4 *Scattering* de ondas y paquetes lineales

Por completitud y comparación, voy a comenzar estudiando el caso lineal, que resulta de despreciar el último término en el miembro izquierdo de la ecuación (7.7), y además voy a empezar por revisar los resultados concernientes a la propagación de ondas monocromáticas. El planteamiento de este problema conduce a la ecuación diferencial estocástica $-u_{xx} + \epsilon(x)u = k^2u$, dónde k es el número de onda, y la relación $\omega = k^2$ es la ley de dispersión que verifica el medio homogéneo. El fenómeno más importante que tiene lugar es la localización de los estados por las inhomogeneidades aleatorias debido al *scattering* (Lifshitz *et al.*, 1988). Ello quiere decir que el coeficiente de transmisión T decae exponencialmente con la longitud del sistema L . De hecho, se puede probar que, si $\epsilon(x)$ es un proceso estocástico estacionario y ergódico, existe un número positivo finito, la longitud de localización $\lambda(k)$, tal que

$$L^{-1} \ln T(k) \sim -\lambda^{-1}(k), \quad (7.9)$$

con lo que, si L es significativamente mayor que $\lambda(k)$, es evidente a partir de la Ec. (7.9) que va a tener lugar muy poca o ninguna transmisión. Si, por simplicidad, tomamos el mismo valor de cambio de frecuencia para todas las impurezas, $\epsilon_n = \epsilon$, e introducimos p^{-1} como un parámetro que

fije la distancia media entre impurezas, la longitud de localización para la ecuación lineal de Schrödinger —en el caso de propagación de ondas monocromáticas— tiene la forma (Lifshitz *et al.*, 1988)

$$\lambda(k) = 4k^2/p\epsilon^2, \quad (7.10)$$

siempre que se verifiquen las siguientes condiciones:

$$\epsilon^2 \ll k^2, \quad p \ll k, \quad k^2 \ll \epsilon^2 L p. \quad (7.11)$$

Pasemos ahora a considerar paquetes de ondas lineales, en los que también encontraremos un decaimiento del coeficiente de transmisión. Voy a investigar las propiedades de un paquete genérico dado por

$$u_{wp}(x, \tau) = \int \frac{dk}{2\pi} P(k) e^{ikx - ik^2\tau} \quad (7.12)$$

cuando se propaga en el sistema desordenado. La función $P(k)$ no es otra cosa que la función espectral del paquete de ondas. Para comparar los resultados que voy a obtener ahora con los relativos a los solitones NLS, cuya expresión ya dí en la ecuación (1.15), tengo que escoger la función $P(k)$ de la forma

$$P(k) = \frac{\pi i}{\cosh \left[\frac{\pi}{2a}(k - k_0) \right]}, \quad (7.13)$$

dónde el parámetro $k_0 \equiv V/2$ es el número de onda de la onda portadora del paquete. El motivo de esta elección es simplemente que el solitón NLS, en el límite $a \rightarrow 0$ de muy pequeñas amplitudes, viene descrito por las expresiones (7.12) y (7.13).

El coeficiente de transmisión para el paquete de ondas se puede escribir como

$$T_{wp} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} T(k) |P(k)|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} |P(k)|^2}. \quad (7.14)$$

Si calculo la integral que aparece en el denominador de la Ec. (7.14), con la función $P(k)$ dada por la Ec. (7.13), llego a la expresión

$$T_{wp} = \frac{\pi}{4a} \int_{-\infty}^{\infty} dk T(k) \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\pi}{2a}(k - k_0) \right]. \quad (7.15)$$

Una vez obtenido el resultado (7.15), puedo definir el valor medio del coeficiente para el paquete como un todo de acuerdo a

$$T \equiv \langle T_{wp} \rangle = \frac{\pi}{4a} \int_{-\infty}^{\infty} dk \langle T(k) \rangle \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\pi}{2a}(k - k_0) \right], \quad (7.16)$$

dónde

$$\langle T(k) \rangle \equiv \frac{\pi^{5/2}}{2} \left(\frac{L}{\lambda(k)} \right)^{-3/2} \exp \left(-\frac{L}{4\lambda(k)} \right) \quad (7.17)$$

es el coeficiente de transmisión del que acabo de hablar en el párrafo anterior, con $\lambda(k)$ definida por la ecuación (7.10), y bajo la restricción (7.11). Tras un poco de álgebra más o menos tediosa, se llega a

$$\mathcal{T} = \begin{cases} \langle T(k_0) \rangle \left(1 + \frac{1}{6}\xi^2 \right), & \text{si } \xi \ll 1 \\ \frac{\pi^2}{4\sqrt{3}} \frac{a}{k} \exp \left[-\frac{3\pi}{2a} \bar{k} \left(1 - \frac{2}{3}\xi^{-1/3} \right) \right], & \text{si } \xi \gtrsim 1 \end{cases} \quad (7.18)$$

dónde he empleado la notación

$$\xi \equiv (\bar{k}/k_0)^3, \quad \bar{k} \equiv \left(\frac{L\epsilon^2 ap}{2\pi} \right)^{1/3}. \quad (7.19)$$

El significado de ξ y \bar{k} es el siguiente: el parámetro ξ describe correcciones al resultado trivial que aparece en la ecuación (7.18), mientras que \bar{k} tiene el sentido de un número de onda característico que viene impuesto por el desorden —ver la ecuación (7.19)—. De la Ec. (7.18), se ve que cuando $\xi \ll 1$, el coeficiente de transmisión medio viene dado sobre todo por las contribuciones de los números de onda que están en la vecindad de $k = k_0$; por otro lado, si $\xi \gtrsim 1$, este valor es fijado por los números de onda cercanos al valor $k = \bar{k}$. He de insistir que en ambos casos las condiciones (7.11) deben darse para los respectivos valores característicos de k .

Otro parámetro de *scattering* importante es el coeficiente de transmisión definido para una única realización del proceso estocástico $\epsilon(x)$. Para una onda plana, tal coeficiente puede definirse asintóticamente, y tiene la forma de la ecuación (7.17) con el factor exponencial modificado, que pasa a ser $\exp(-L/\lambda(k))$. Mediante la relación asintótica, Ec. (7.9), el coeficiente para todo el paquete puede calcularse —con precisión logarítmica—, partiendo de la expresión (7.15), con lo que se llega a

$$\ln T_{wp} \simeq \begin{cases} \ln T(k_0), & \text{if } \xi \ll 1 \\ -\frac{3\pi}{a\sqrt{2}} \exp \left[\bar{k} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3}\xi^{-1/3} \right) \right], & \text{if } \xi \gtrsim 1, \end{cases} \quad (7.20)$$

dónde ξ y \bar{k} están definidos una vez más por la ecuación (7.19). Estas ecuaciones son muy similares a las que aparecen en la Ec. (7.18). Por tanto, parece claro que el comportamiento general del paquete de ondas, bien sea

descrito por el coeficiente de transmisión medio $T = \langle T_{wp} \rangle$ o por el coeficiente de transmisión T_{wp} definido en una realización, es cualitativamente el mismo, y coincide también cualitativamente con el de una onda monocromática: en el sistema lineal, un decaimiento exponencial del coeficiente de transmisión caracteriza tanto a la onda plana como al paquete de ondas.

7.5 Scattering de solitones NLS

7.5.1 Aproximación de colisiones independientes

En esta sección paso a considerar el problema completamente no lineal, es decir, el *scattering* de un solitón, Ec. (1.15), por el sistema de impurezas puntuales, de igual intensidad $\epsilon_n = \epsilon$. El solitón incide sobre la primera delta viniendo desde la izquierda, interacciona con ella, y se descompone en una parte reflejada y una parte transmitida. Mi primera hipótesis va a ser suponer que la onda resultante de tal proceso es de nuevo un solitón, más algunas ondas cuasi-lineales —radiación—. Para comenzar el cálculo, diré que, de entre las infinitas cantidades conservadas que caracterizan al sistema NLS —infinitas por ser integrable— voy a utilizar la energía,

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx (|u_x|^2 + \epsilon(x)|u|^2 - |u|^4), \quad (7.21)$$

y el llamado *número de cuasi-partículas*,

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} dx |u|^2, \quad (7.22)$$

para caracterizar el proceso de *scattering* del solitón. Durante tal proceso, los valores de ambas cantidades variarán debido a la emisión de radiación. Esa variación ocurre para el nuevo solitón que aparece tras la interacción con cada delta, no, obviamente para el sistema como un todo, en el que se suman las contribuciones del solitón y de la radiación. A tal fin, me voy a interesar en dos magnitudes: el coeficiente de transmisión de la energía total, $T^{(E)} = E_t/E_i$, es decir, la energía transmitida E_t sobre la incidente E_i —al igual que en el capítulo anterior, y el coeficiente de transmisión del número de cuasi-partículas, $T^{(N)} = N_t/N_i$, N_t con N_i definido de manera análoga. Por supuesto, se sobreentiende que se verifican las ligaduras $E_i = E_t + E_r = \text{constante}$ and $N_i = N_t + N_r = \text{constante}$.

Cuando la concentración p de impurezas es baja, es bastante razonable suponer que la distancia media entre dos de ellas es mucho más larga que el

tamaño del solitón. En este límite, ya he dicho que, como se desprende de resultados previos, podemos tratar el *scattering* por un sistema de muchas impurezas independientemente, definiendo el coeficiente de transmisión para el intervalo desordenado —el que va de la primera a la última delta— como $T \approx \prod_j T_j$, siendo T_j el coeficiente de transmisión de la j -ésima impureza. Esto es la misma aproximación de Qiming *et al.* (1988b), la aproximación de *scattering* o colisiones independientes. Lo que estoy despreciando al hacerlo es la existencia de efectos de interferencia con las reflexiones de cada delta. Con ello, el solitón transmitido a través de la impureza j -ésima es, sin cambio, el incidente sobre la impureza $(j+1)$ -ésima, lo que permite escribir

$$E_{j+1} = E_j T_j^{(E)}(E_j, N_j), \quad (7.23)$$

$$N_{j+1} = N_j T_j^{(N)}(E_j, N_j), \quad (7.24)$$

de dónde

$$\Delta E_{j+1} = E_{j+1} - E_j = -E_j R_j^{(E)}(E_j, N_j), \quad (7.25)$$

$$\Delta N_{j+1} = N_{j+1} - N_j = -N_j R_j^{(N)}(E_j, N_j), \quad (7.26)$$

dónde $R_j^{(E,N)} = 1 - T_j^{(E,N)}$ representan los coeficientes de reflexión de la energía total y del número de cuasi-partículas, respectivamente. Hay que resaltar que, a diferencia del caso lineal, tenemos que tomar dos características independientes de los solitones, —dos coeficientes de reflexión, por tanto— puesto que dependen de dos parámetros y no de uno sólo como entonces. Como, en promedio, habrá $(\Delta x)p$ impurezas en el intervalo Δx , podemos pasar las ecuaciones (7.25) y (7.26) a forma diferencial, y escribir

$$\frac{dE}{dx} = -p E(x) R^{(E)}[E(x), N(x)], \quad (7.27)$$

$$\frac{dN}{dx} = -p N(x) R^{(N)}[E(x), N(x)], \quad (7.28)$$

en dónde ahora queda implícita la hipótesis de que el solitón subsiste como tal durante el *scattering*, y la de que éste tiene lugar de manera independiente en cada delta.

Para completar el planteamiento del sistema dado por las ecuaciones (7.27) y (7.28), es necesario calcular los coeficientes de reflexión para una delta aislada, $R^{(N)}(E, N)$ y $R^{(E)}(E, N)$, que será lo que me ocupará en la siguiente subsección. Ahora terminaré ésta mencionando un aspecto que merece la pena destacar aunque sea brevemente, y es que las ecuaciones

(7.27) y (7.28) todavía precisan —y mantienen en su interior— del carácter aleatorio de la disposición de las deltas, a través del empleo de coeficientes medios y sobre todo de un número medio de impurezas en el intervalo. Otras elecciones para la forma en que estén colocadas las impurezas, como, por ejemplo, en una red periódica, no estarían bien descritas por estas dos ecuaciones, puesto que habría efectos debidos a correlación —impuesta por la periodicidad— que no se estarían teniendo en cuenta.

7.5.2 Cálculo de coeficientes de reflexión

Al igual que en el capítulo precedente, los coeficientes de reflexión pueden calcularse mediante la teoría IST de perturbación. Esos coeficientes dependen de las ondas cuasi-lineales emitidas por el solitón debido al proceso de *scattering*. Para el problema de la ecuación NLS —ver, por ejemplo, Kivshar y Malomed (1989)—, la densidad espectral de ondas emitidas está relacionada con el coeficiente de Jost a través de la expresión

$$n_{\text{rad}}(\lambda, \tau) = \frac{1}{\pi} |b(\lambda, \tau)|^2, \text{ at } |b(\lambda, \tau)|^2 \ll 1; \quad (7.29)$$

a su vez, el parámetro espectral λ está ligado al número de onda $k(\lambda)$ y a la frecuencia $\omega(\lambda)$ de las ondas radiadas mediante las relaciones $\omega(\lambda) = k^2(\lambda) = 4\lambda^2$. Cuando la ecuación NLS se perturba, la influencia de la perturbación $P(u)$ conduce a un cambio de los datos de *scattering* de la IST, que por supuesto afecta al coeficiente de Jost $b(\lambda, \tau)$, que varía de acuerdo a

$$\begin{aligned} \frac{\partial b(\lambda, \tau)}{\partial \tau} &= 4i\lambda^2 b(\lambda, \tau) + \\ &+ \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} dx [P(u) \Phi_1^{(1)}(x, \tau; \lambda) \Phi_2^{(2)}(x, \tau; \lambda) - \\ &- P^*(u) \Phi_2^{(1)}(x, \tau; \lambda) \Phi_1^{(2)}(x, \tau; \lambda)], \end{aligned} \quad (7.30)$$

dónde $\Phi_{1,2}^{(1)}$ y $\Phi_{1,2}^{(2)}$ son las dos componentes de las funciones de Jost del problema directo. Cuando nos restringimos a soluciones a un solitón, esta ecuación se concreta en

$$\begin{aligned} \frac{\partial b(\lambda, \tau)}{\partial \tau} &= 4i\lambda^2 b(\lambda, \tau) + \frac{\epsilon}{\left[\left(\lambda + \frac{V}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4}\right]} \times \\ &\times \left\{ \frac{a^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} dx P(u_s) \frac{\exp[-2i\lambda x - iVx + 2i\Delta(\tau)]}{\cosh^2 Z} \right\} - (7.31) \end{aligned}$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} dx P^*(u_s) e^{-2i\lambda x} \left(\lambda + \frac{V}{4} - \frac{ia}{2} \tanh Z \right)^2 \Bigg\},$$

con $Z = a(x - V\tau)$, $\Delta = \left(\frac{V^2}{4} - a^2\right)\tau$. Como nos interesa encontrar el coeficiente de reflexión para una impureza aislada, tendremos que tomar luego la perturbación $P(u)$ en la forma $\epsilon\delta(x - x_0)u$, siendo x_0 la posición de dicha impureza.

Si antes del *scattering* el dato inicial es un solitón, Ec. (1.15), la condición inicial correspondiente para la ecuación (7.31) debe tomarse, al igual que en el capítulo 6, como $b(\lambda, \tau = -\infty) = 0$. Una vez integrada esa ecuación, ya se puede encontrar la densidad de radiación después del *scattering* teniendo en cuenta la expresión (7.29), utilizando

$$n_{\text{rad}}(\lambda, \tau = +\infty) = \frac{1}{\pi} |b(\lambda, \tau = +\infty)|^2. \quad (7.32)$$

La ecuación (7.32) permite calcular el número de cuasi-partículas y la energía de las ondas reflejadas, que vendrán dados por

$$N_r = \int_{-\infty}^0 d\lambda n_{\text{rad}}(\lambda), \quad E_r = 4 \int_{-\infty}^0 d\lambda \lambda^2 n_{\text{rad}}(\lambda), \quad (7.33)$$

y a continuación definir los coeficientes de reflexión

$$R^{(N)} = \frac{N_r}{N}, \quad R^{(E)} = \frac{E_r}{E}. \quad (7.34)$$

Aquí ha de entenderse que N y E son el número de cuasi-partículas y la energía correspondientes al solitón sin perturbar (1.15), que son

$$N = 2a, \quad E = \frac{1}{4}N(V^2 - \frac{1}{3}N^2). \quad (7.35)$$

Se pueden encontrar expresiones explícitas para estos coeficientes en la aproximación de Born, válida para ϵ pequeño y $V^2 \gg |\epsilon|a$. Teniendo en cuenta las ecuaciones (1.15), (7.31), (7.32) y (7.33) es posible llegar a las ecuaciones siguientes para los coeficientes de reflexión del solitón:

$$R^{(N)} = \frac{\pi\epsilon^2}{64NV} \int_0^\infty dy F(y, \alpha), \quad (7.36)$$

$$R^{(E)} = \frac{\pi\epsilon^2 V}{256E} \int_0^\infty dy y^2 F(y, \alpha), \quad (7.37)$$

dónde

$$F(y, \alpha) = \frac{[(y+1)^2 + \alpha^2]^2}{\cosh^2 \left[\frac{\pi}{4\alpha} (y^2 + \alpha^2 - 1) \right]}, \quad (7.38)$$

y $\alpha \equiv N/V$. Inmediatamente, las ecuaciones (7.27) y (7.28) junto con este cálculo dan lugar al sistema de ecuaciones íntegro-diferenciales, dado por

$$\frac{dN}{dz} = -\frac{1}{V} \int_0^\infty dy F(y, \alpha), \quad (7.39)$$

$$\frac{dV}{dz} = -\frac{1}{2N} \int_0^\infty dy (y^2 - 1) F(y, \alpha) - \frac{N}{2V^2} \int_0^\infty dy F(y, \alpha), \quad (7.40)$$

dónde la distancia se mide en unidades de $x_0 = 64/\pi p \epsilon^2$, es decir $z = x/x_0$. Diré que, por conveniencia, he usado la relación (7.35) para escribir una ecuación para V en vez de la que previamente había obtenido para E .

7.5.3 Ecuaciones de evolución de los parámetros del solitón

En las subsecciones anteriores he obtenido, como resultado final, las ecuaciones que describen la variación de N y V a medida que el solitón, preservando su identidad de acuerdo a mi hipótesis, se va desplazando a lo largo del eje x y colisionando con las sucesivas deltas. Ahora voy a estudiar con detalle este sistema, las ecuaciones (7.39) y (7.40), y para eso, lo primero sobre lo que quiero llamar la atención es que después de profundizar algo en él se advierte que el parámetro relevante en ese problema es α . Esta cantidad tiene un significado físico preciso: está directamente relacionada con la no linealidad del solitón incidente o de partida, que adquiere, por así decir, un carácter más y más no lineal cuanto mayor se vaya haciendo el valor del parámetro α . Esto puede entenderse sin más que observar que para cada valor fijo de $V(0)$, cuanto más grande sea α , mayor es el número de cuasi-partículas contenido en el solitón, y menor su extensión espacial —más localizado, consiguientemente—. Por el contrario, si α es pequeño, se puede ver fácilmente que la onda es correspondiente es muy parecida a un paquete lineal —ver ecuaciones (1.15), (7.12) y (7.13)—.

Con el significado físico de α ya en mente, podemos entrar en el análisis del sistema (7.39) y (7.40). Consideraré primero su límite lineal, $\alpha \ll 1$; con esta simplificación, no es difícil mostrar que las ecuaciones (7.39) y (7.40) pueden resolverse analíticamente de forma aproximada —para ello hay que notar que si $\alpha \ll 1$ la derivada de V se hace despreciable, puesto que las integrales nunca pueden ser de un orden de magnitud mucho mayor que la

unidad—, dando $V(x) = V(0) = \text{constante}$, con lo que los dos coeficientes de transmisión se hacen iguales y son

$$T^{(N,E)}(x) = N(x)/N(0) = E(x)/E(0) = e^{-x/\lambda_0}, \quad (7.41)$$

dónde $\lambda_0 \equiv V^2(0)/p\epsilon^2 = 1/p R_1$, siendo $R_1 \equiv \epsilon^2/V^2(0)$ el coeficiente de reflexión de una impureza aislada. Este resultado demuestra el decaimiento exponencial del coeficiente de transmisión, y es consecuencia de las características cuasi-lineales de los solitones con valores bajos de α , que se asemejan mucho, como ya dije, a paquetes lineales, por lo que el resultado no deja de ser lógico. Como se puede ver, estas ecuaciones muestran otra vez la misma dependencia que ya encontré en las Ecs. (7.9) y (7.18), dónde $\lambda(k_0) = \lambda_0$, y $k_0 = V/2$ es el número de onda de la portadora del paquete. El último término en el miembro derecho de (7.18) refleja, desde este punto de vista, la influencia de la anchura del paquete $-a^{-1}$ — y de su actuación, oponiéndose al desorden, sobre el coeficiente de transmisión medio.

En el límite opuesto, $\alpha \sim 1$ o mayor, el sistema de ecuaciones íntegro-diferenciales (7.39) y (7.40) ya no se puede resolver explícitamente, por lo que me he visto obligado a estudiarlo numéricamente. En este sentido, el sistema no ofrece grandes dificultades, puesto que las funciones que aparecen son suaves, y las integrales contienen funciones hiperbólicas que permiten restringir el intervalo de integración manteniendo gran precisión. Llevé a cabo el cálculo de las integrales mediante un simple método de rectángulos, con tamaño del paso proporcional al valor de α , que además recalculaba en cada paso de integración temporal de las ecuaciones, para conservar la precisión en la estimación. En cuanto a las ecuaciones en sí, también fue suficiente el método más sencillo, el de Euler, pero como comprobación repetí bastantes integraciones con métodos más sofisticados, como el de *leap-frog*, siempre con muy buen acuerdo. De esta manera, pude llegar a conclusiones bien definidas sobre la dinámica del sistema (7.39) y (7.40).

El hallazgo más importante —que me sugirió la integración numérica y fui luego capaz de demostrar rigurosamente *a posteriori*— es que las soluciones del sistema íntegro-diferencial dependen esencialmente de cómo se escoja el valor del parámetro $\alpha(0) = N(0)/V(0)$, porque dicho sistema resulta tener un punto fijo, que es la solución de la ecuación transcendental

$$\alpha_c^2 - 2 + G(\alpha_c) = 0, \quad G(\alpha) \equiv \frac{\int_0^\infty dy (y^2 - 1) F(y, \alpha)}{\int_0^\infty dy F(y, \alpha)}. \quad (7.42)$$

He calculado este valor numéricamente de dos formas: por un lado, buscándolo mediante integraciones directas del sistema, dando un dato inicial

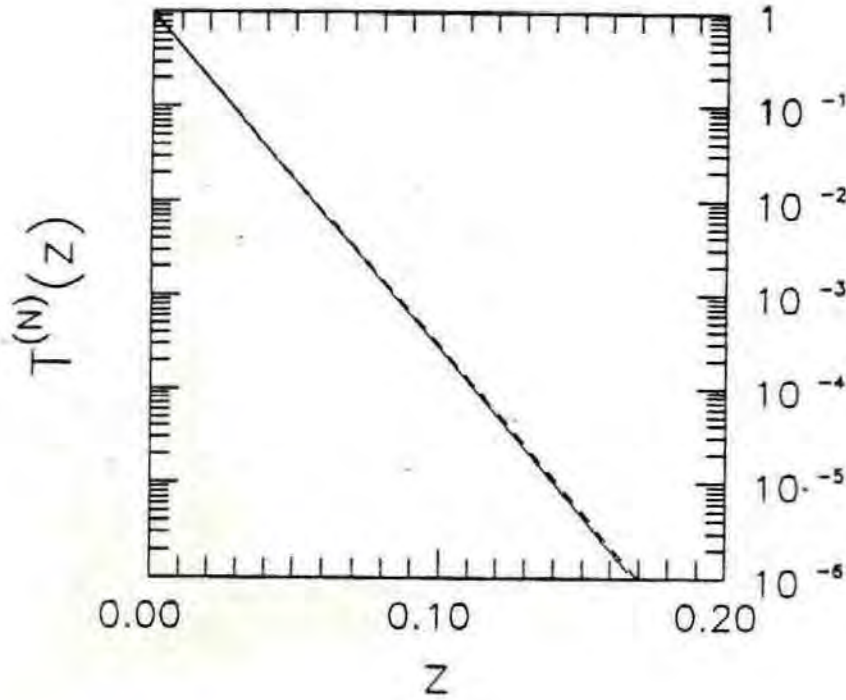


Figura 7.1: Coeficientes para un solitón con α muy pequeño

y viendo si era o no punto fijo, y, por otro, resolviendo numéricamente la ecuación (7.42). El acuerdo entre los dos valores obtenidos fue excelente, y pude establecer que

$$\alpha_c = 1.28505(4). \quad (7.43)$$

Más aún, he podido establecer, como mostraré en la siguiente subsección, que α_c es un punto fijo inestable. Esto es importante, en la medida en que el análisis que voy a exponer inmediatamente es válido, sin importar que estemos muy cerca de α_c .

Basta calcular la derivada de $\alpha(z)$ a partir del sistema íntegro-diferencial (7.39), (7.40) para establecer que sólo son posibles dos tipos de soluciones de ese sistema —además de la del punto fijo $\alpha = \alpha_c$ —, que quedan completamente fijados por la condición inicial que se escoja. Comenzaré describiendo el caso $\alpha(0) < \alpha_c$. Si se parte de una condición inicial así, el solitón evoluciona hacia un estado final en el que N tiende asintóticamente a cero mientras V tiende a una constante positiva, con lo que se sigue que α va también a cero con z creciente. Este comportamiento corresponde a un decrecimiento del coeficiente de transmisión, decrecimiento que, de acuerdo al análisis que hice más arriba para el caso en que α es muy pequeño, es exponencial, y viene bastante bien descrito por la fórmula (7.41). Un ejemplo se aprecia en la figura 7.1, en la que presento resultados analíticos —línea

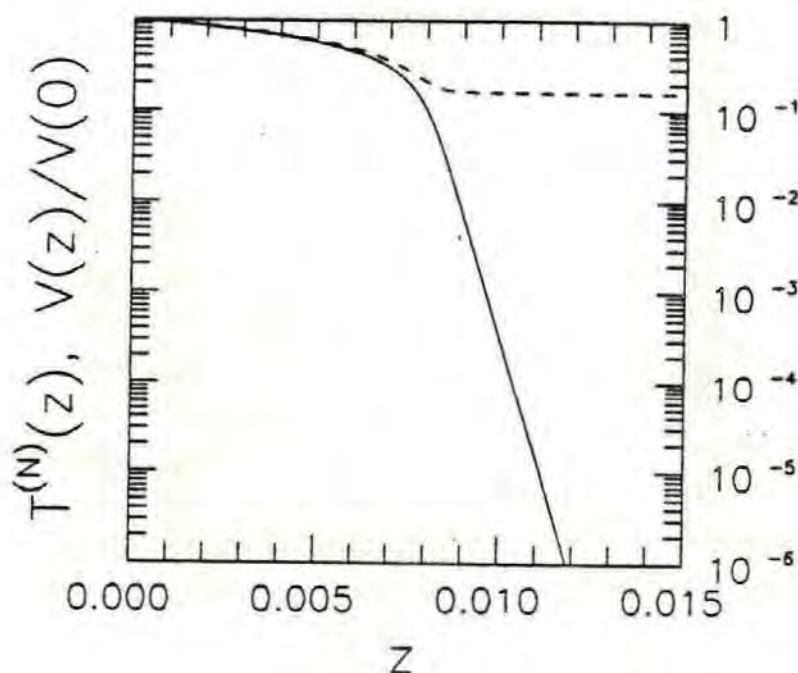


Figura 7.2: Coeficientes para un solitón con $1 \sim \alpha < \alpha_c$

de trazos— y numéricos —línea continua; obsérvese la concordancia— para el caso en que $N(0) = 0.01$, $V(0) = 0.5$, y por tanto $\alpha(0) = 0.02$. Cuando tenemos una condición inicial tal que $1 \sim \alpha < \alpha_c$ el decaimiento de $N(z)$, si bien sigue existiendo, es más complicado: es más lento al principio, pero, al cabo de un cierto tiempo, sufre una transición a un régimen de rápido decaimiento exponencial, más rápido que en el caso anterior. Así sucede en la figura 7.2, en la que los datos iniciales eran $N(0) = 0.625$, $V(0) = 0.5$ y entonces $\alpha = 1.25$, muy cerca pero por debajo de α_c ; $T^{(N)}(z)$ es la línea continua, y la de puntos corresponde a $V(z)/V(0)$ —como en el resto de las figuras—.

El otro tipo de solución tiene lugar cuando $\alpha(0) > \alpha_c$. Cuando se parte de datos así, las soluciones subsiguientes son tales que tanto N como V sufren un rápido decaimiento, hasta un punto a partir del cual ambas se hacen constantes. Evidentemente, *a fortiori*, lo mismo sucede con α , que tiende a algún valor fijo en torno a $\alpha \approx 10$ cuando z va a infinito. Las figuras 7.3 a 7.5 resumen con abundante detalle las características de la dinámica asintótica y su dependencia de los valores iniciales de N y V . Cada elección de condiciones iniciales conlleva formas distintas para los coeficientes de transmisión, incluso para valores iguales de α —figura 7.3: arriba, $N(0) = 0.25$ y $V(0) = 0.1$; abajo, $N(0) = 1.25$, $V(0) = 0.5$; en ambos casos,

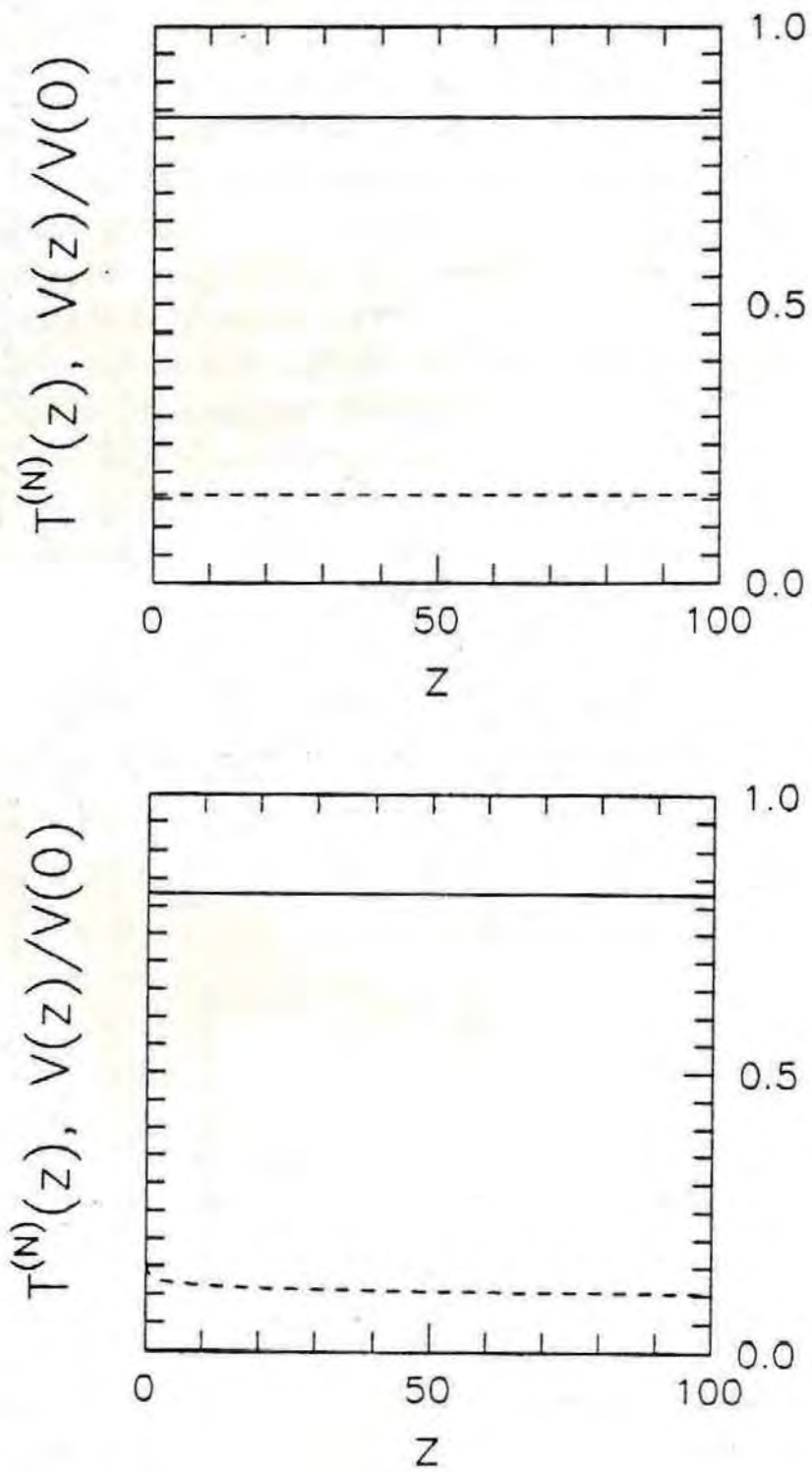


Figura 7.3: Coeficientes para solitones con igual $\alpha > \alpha_c$

$\alpha(0) = 2.5$ —. La parte más sensible a las condiciones iniciales es el transitorio que ocurre a intervalos espaciales cortos: la pendiente es tanto más pronunciada cuanto más pequeños los valores de $N(0)$ y $V(0)$, como también es menor el intervalo necesario para llegar al estado asintótico. Este transitorio tiene lugar habitualmente en una zona muy pequeña para que aparezca en las gráficas, que están hechas hasta z muy grande para destacar la constancia de los coeficientes; las pendientes de tales transitorios llegan a alcanzar valores hasta de 10^5 . Sin embargo, la propiedad general de estas curvas es la misma: ambos coeficientes tienden a valores asintóticos, y por tanto, el solitón se propaga —después del transitorio— sin reflexión y la localización se ve inhibida. En la figura 7.4 represento los resultados para casos con la misma velocidad inicial $V(0)$ — $V(0) = 0.1$; arriba, $N(0) = 0.01$, $\alpha(0) = 0.1$; en el centro, $N(0) = 0.1$, $\alpha(0) = 1$; abajo, $N(0) = 0.5$, $\alpha = 5$ —, y en la 7.5 para el mismo número de cuasi-partículas inicial — $N(0) = 0.1$; arriba, $V(0) = 0.25$, $\alpha(0) = 0.4$; en el centro, $V(0) = 0.08$, $\alpha(0) = 1.25$; abajo, $V(0) = 0.04$, $\alpha(0) = 2.5$ —. Todas estas gráficas permiten hacerse una idea de lo que he explicado en el párrafo precedente.

7.5.4 Comportamiento cerca del parámetro crítico

Voy a concluir el capítulo probando que el punto fijo α_c que he encontrado para las ecuaciones (7.39) y (7.40) es inestable. Para ello, reescribo dicho sistema como

$$\frac{d\alpha}{dz} = \frac{1}{N^2} G_1(\alpha), \quad (7.44)$$

$$\frac{dN}{dz} = -\frac{1}{N} G_2(\alpha), \quad (7.45)$$

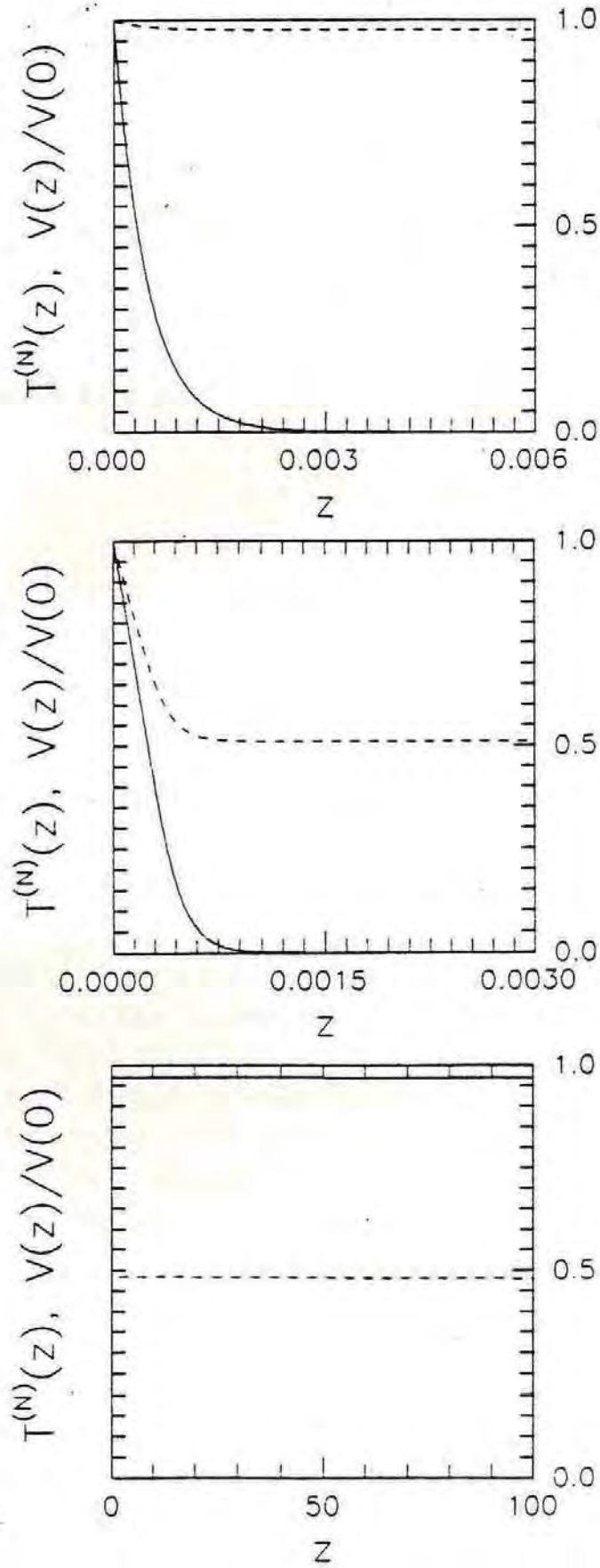
siendo

$$G_1(\alpha) \equiv \frac{\alpha^2}{2} \left[\int_0^\infty dy y^2 F(y, \alpha) + (\alpha^2 - 3) \int_0^\infty dy F(y, \alpha) \right], \quad (7.46)$$

$$G_2(\alpha) \equiv \alpha \int_0^\infty dy F(y, \alpha). \quad (7.47)$$

En esta nueva notación, α_c no es nada más que la solución de la ecuación $G_1(\alpha_c) = 0$. Si ahora desarrollo Taylor en la ecuación (7.44) en las cercanías de $\alpha = \alpha_c$, obtengo

$$\frac{d\alpha}{dz} = \frac{1}{N^2} \left[G_1(\alpha_c) + (\alpha - \alpha_c) \left(\frac{dG_1}{d\alpha} \right)_{\alpha=\alpha_c} + \dots \right]; \quad (7.48)$$

Figura 7.4: Coeficientes para solitones con igual $V(0)$

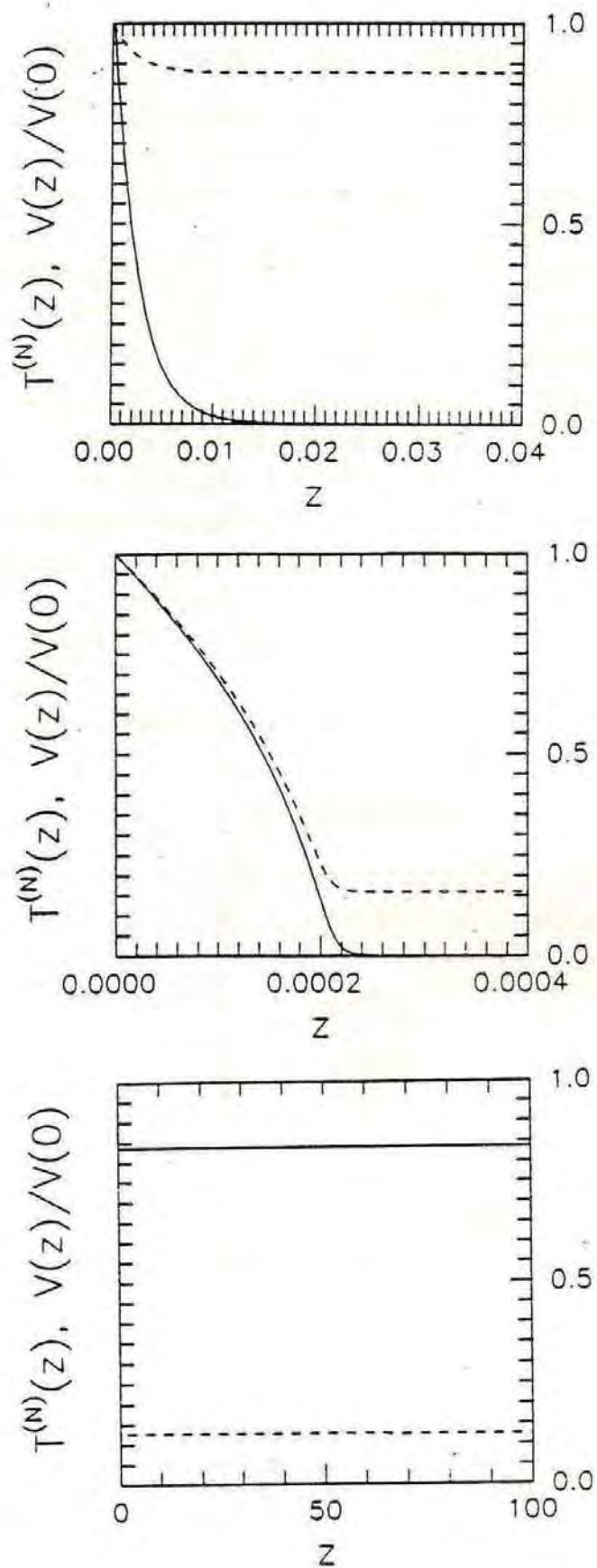


Figura 7.5: Coeficientes para solitones con igual $N(0)$

por otra parte, puedo cambiar la ecuación (7.45) por

$$\frac{dN}{dz} = -\frac{1}{N} G_2(\alpha_c), \quad (7.49)$$

cambio que será válido aproximadamente mientras no me aleje demasiado de $\alpha = \alpha_c$. Se ve mediante un cálculo sencillo que, reteniendo sólo términos de primer orden en α , la solución del sistema (7.48), (7.49) está dada por

$$\alpha(z) = \alpha_c + (\alpha(0) - \alpha_c) \left[1 - \frac{2B}{N^2(0)} z \right]^{-\frac{A}{2B}}, \quad (7.50)$$

$$N^2(z) = N^2(0) - 2Bz, \quad (7.51)$$

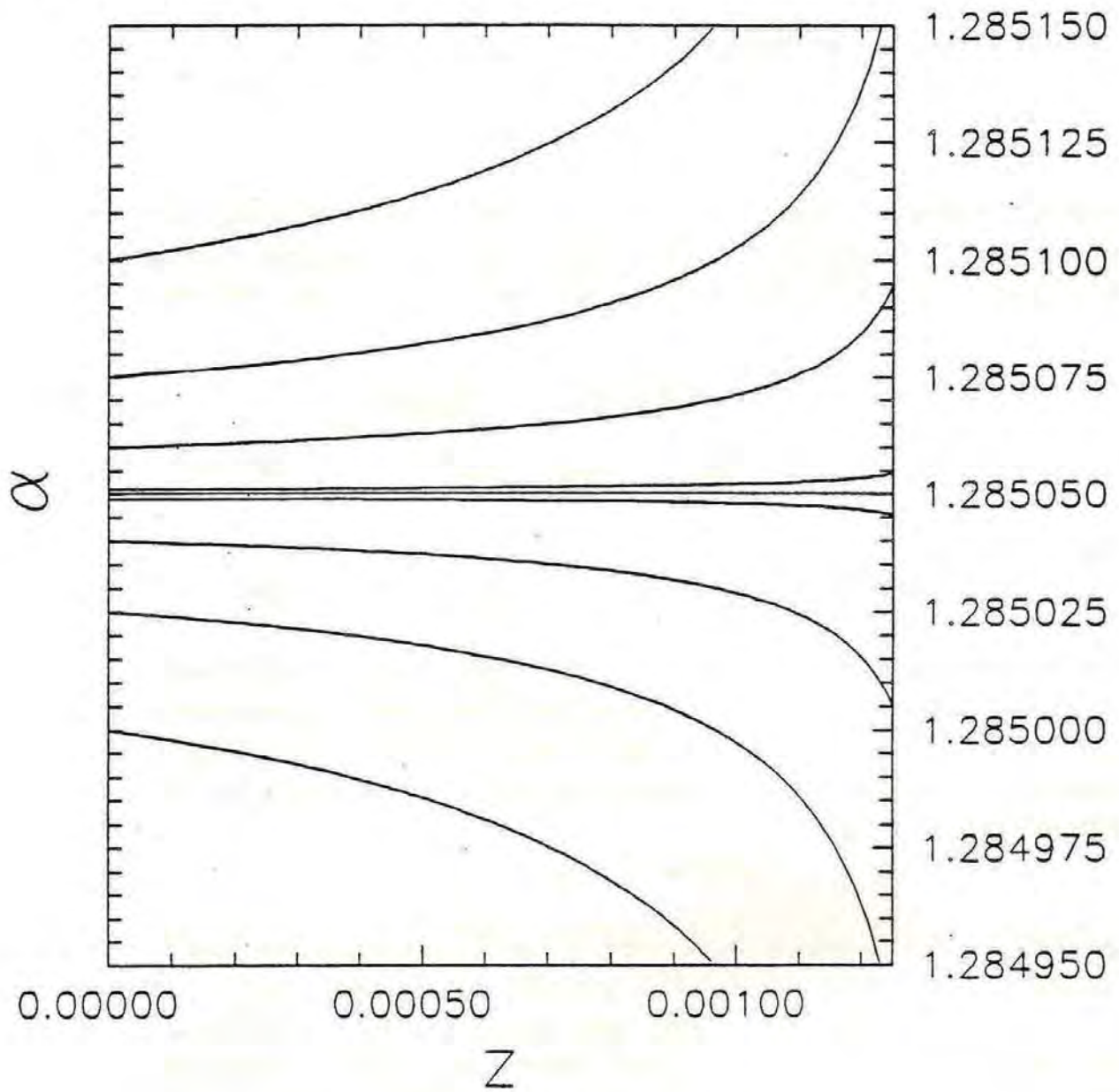
con

$$A \equiv \left(\frac{dG_1}{d\alpha} \right)_{\alpha=\alpha_c} = 25.2(4), \quad B \equiv G_2(\alpha_c) = 23.4(6). \quad (7.52)$$

Los valores que doy para A y B son estimaciones numéricas, obtenidas con precisión suficiente para mi propósito, pues todo cuanto quiero demostrar es que ambas cantidades son positivas. Si ahora considero la expresión (7.50) cuando la condición inicial es mayor que, pero muy cercana a, α_c , tengo una solución de la forma

$$\alpha(z) = \alpha_c + \frac{c_1}{(1 - c_2 z)^k}, \quad (7.53)$$

de dónde se ve que para toda elección de condiciones iniciales —mayores que la crítica—, α crecerá, apartándose del valor crítico, puesto que las constantes c_1 , c_2 y k son todas positivas. No hay problemas con el denominador, porque mucho antes de que z tome valores que lo hagan muy pequeño o diverger, el análisis que me ha llevado a este resultado deja de ser válido, al no estar $\alpha(z)$ cercano a α_c . Un cálculo idéntico muestra que si las condiciones iniciales están cerca de α_c pero por debajo, c_1 pasa a ser negativa, y $\alpha(z)$ decrece, alejándose de nuevo del punto fijo. Para dejar todo esto más claro, he representado en la figura 7.6 algunas soluciones obtenidas numéricamente con condiciones iniciales en torno al valor crítico, cuya inestabilidad queda claramente puesta de manifiesto.

Figura 7.6: Inestabilidad de α_c

IV

Conclusión

Conclusiones. Cuestiones abiertas

“— Hasta la vista, doctor —dijo Atanágoras.

El profesor Mascamangas tenía una sonrisa triste.

— Hasta la vista —dijo Angel.

— No se inquiete —dijo el abad—. Por lo general, los inspectores están entumecidos. ¿Quiere usted una plaza de ermitaño?

— No —dijo Mascamangas—. Me encuentro cansado. Es mejor dejar las cosas como están. Hasta la vista, Angel. Y no se atocine. Le dejaré mis camisas amarillas.

— Me las pondré —dijo Angel.

Volviéron sobre sus pasos y estrecharon la mano del profesor. Luego, el abad Petitjean a la cabeza, empezaron a bajar la ruidosa escalera. Angel, que bajaba el último, se volvió por última vez. El profesor Mascamangas le hizo un gesto de despedida. Las comisuras de su boca traicionaban su emoción.”

Boris Vian, *El Otoño en Pekin*.

8.1 Conclusiones

En esta sección intento recopilar los principales resultados que he obtenido a lo largo de la tesis. Por brevedad, he preferido presentarlos aquí de una manera esquemática, sin insistir demasiado en la evidencia que los apoya, que creo que queda bastante clara en el cuerpo del trabajo, ni tampoco en su explicación detallada. Iré mencionándolos uno por uno, agrupándolos por temas.

- El procedimiento de estudio numérico de ecuaciones de Klein-Gordon no lineales estocásticas ha quedado verificado, y sus buenas propiedades demostradas. Esto incluye:

- Comprobación de la no dependencia del resultado del número de realizaciones en los promedios, lo que equivale a determinar el tamaño de la colectividad a incluir en ellos.
 - Existencia de un análogo discreto de la fórmula PMR que se cumple de manera muy aproximada en las simulaciones.
 - Estas propiedades del esquema Strauss-Vázquez estocástico sugieren que los esquemas conservativos pueden ser la base más apropiada para la integración numérica de problemas estocásticos de todo tipo.
- El modelo ϕ^4 con fluctuaciones temporales del potencial ha sido completamente caracterizado mediante simulaciones.
 - El régimen de ruido débil o fuerte depende de la velocidad inicial del *kink*, y el umbral está en torno a $2D \sim 0.01$ para *kinks* lentos — $v_0 \leq 0.5$, más o menos— y $2D \sim 0.1$ para *kinks* rápidos — $v_0 \geq 0.8$ —.
 - La energía del sistema crece exponencialmente con un exponente que es proporcional a la intensidad del ruido. Asimismo, la dispersión del centro del *kink* se comporta en un primer período de la evolución —de duración en torno a D^{-1} — como t , pasando luego a un régimen en que crece como t^2 .
 - Los *kinks* son estables y recuperan su forma, aunque con velocidad menor que la inicial, mientras el tiempo de perturbación no exceda un límite que depende del valor que alcance la energía. Como el crecimiento de la energía es conocido, se puede estimar el tiempo durante el cual los *kinks* resistirán el ruido.
 - La disipación eleva un orden de magnitud el umbral que separa a las perturbaciones débiles de las fuertes.
 - Los *kinks* lentos no son capaces de atravesar fronteras entre zonas no fluctuantes y fluctuantes del sistema. Más aún, no son reflejados, sino que quedan atrapados en ellas.
 - Las propiedades del modelo ϕ^4 con fluctuaciones temporales del potencial han sido estudiadas también analíticamente, explicando en buena parte los resultados de las simulaciones.
 - Se demuestra que los efectos del ruido tienen que depender de la velocidad de los *kinks* y ser despreciables cuando esta tiende a la velocidad máxima.

- La energía del modo interno crece de modo difusivo, es decir, con la raíz cuadrada del tiempo, mientras que la tasa de producción de radiación es constante.
 - Se puede ver, mediante tratamiento perturbativo, que la velocidad de los *kinks* lentos va a cero al incidir sobre una frontera entre zonas no perturbadas y perturbadas.
 - La radiación generada por el *kink* es amplificada a tiempos intermedios por acción directa del ruido a través de la resonancia paramétrica estocástica, que cambia su densidad espectral y da lugar al crecimiento exponencial de la energía y a la difusión anómala.
 - La disipación juega papeles distintos a tiempos cortos, en los que todo lo que hace es frenar a los *kinks*, y a tiempos largos, cuando su acción además impide el crecimiento ilimitado de la energía y estabiliza el sistema, mediante inhibición de la resonancia paramétrica.
- El modelo ϕ^4 con estocasticidad espacial ha probado ser mucho más problemático que el temporal en cuanto a propagación de los *kinks* se refiere.
 - Los *kinks* sufren un proceso de *pinning* con ruidos espaciales de intensidades muy bajas, del orden de $2D \sim 0.01$. La razón principal es que parecen ser muy sensibles a perturbaciones inhomogéneas.
 - De las simulaciones se deduce además que su propagación estable es muy problemática puesto que la probabilidad de encontrar modificaciones locales drásticas del potencial es muy alta.
 - La respuesta de los *kinks* no es simétrica, sino que el ruido les induce a moverse durante un tiempo en sentido positivo si están parados inicialmente.
 - Las aproximaciones analíticas son muy limitadas y no parece probable que se puedan extender sin modificarlas radicalmente. Empero, son capaces de explicar la respuesta asimétrica de los *kinks* de manera natural.
 - Se ha demostrado la existencia real, más allá de predicciones perturbativas, de efectos resonantes en el *scattering* de *kinks* de sG y ϕ^4 por impurezas puntuales.

- Las resonancias pueden incrementar enormemente la transparencia de esas impurezas o por el contrario disminuirla: el coeficiente de reflexión depende oscilatoriamente de la distancia entre impurezas.
 - Cuando la distancia entre impurezas es grande, dos o tres veces el tamaño del solitón, los efectos de interferencia en los sistemas sG y ϕ^4 con acoplo no lineal desaparecen, y el *scattering* tiene lugar independientemente por cada delta.
 - En el caso de ϕ^4 , si las impurezas se acoplan linealmente al campo, la dependencia del coeficiente de reflexión de la distancia entre impurezas se vuelve más compleja y ya no se puede describir de forma sencilla. A separaciones grandes, la reflexión parece incluso menor que en *scattering* independiente.
- La no linealidad puede inhibir la localización de ondas de pequeña amplitud en sistemas NKG y solitones en sistemas NLS. Existe un valor crítico del parámetro de no linealidad α —la razón del número de cuasi-partículas del solitón a su velocidad—, que es $\alpha_c = 1.28505$ tal que solitones con valores superiores de α se propagan sin reflexión en sistemas diluidos de impurezas dispuestas al azar.

8.2 Cuestiones abiertas

Siempre se dice que cada vez que se logra dar respuesta a una pregunta en Física, ese logro origina muchas más preguntas nuevas; eso es algo que también sucede en este trabajo. Por otra parte, a medida que se avanza en el conocimiento de una materia, también de manera natural aparecen los nuevos caminos que son más accesibles o cuyo estudio parece más lógico desde la perspectiva de lo ya realizado. En este sentido, yo encuentro una serie de cuestiones que consituirían extensiones directas de este trabajo. Creo que ambos tipos de planteamientos de investigaciones futuras merecen un sitio aquí, y creo que su sitio es éste, al final —aunque no he podido dejar de mencionar algunos en otros lugares, dónde venían más a propósito—, casi como una conclusión más, por lo que voy a dedicar a esta discusión la última sección de esta tesis.

En primer lugar, trataré de los problemas que me he encontrado en este estudio, y que quedan sin resolver, o cuya resolución no ha sido completa. Así sucede, por ejemplo, con el régimen de ruido fuerte del modelo ϕ^4 con

estocasticidad temporal, no sólo en el caso que estudio aquí de acoplo no lineal, sino en general. En las simulaciones he visto que el crecimiento de la energía es exponencial, y he dado una explicación analítica tentativa basada en la resonancia estocástica que aparece debido a la radiación. Estoy realmente convencido de que esa es la explicación, pero habría que intentar mejorar el cálculo para hacerla cuantitativa, y en todo caso, es válida durante un cierto tiempo, pero cuando la resonancia ha hecho crecer mucho la radiación deja de serlo —obviamente porque entonces hay que tener en cuenta efectos no lineales—. De hecho, es el mismo mecanismo de desestabilización de la cadena lo que no está claro; he descubierto que tiene lugar cuando la energía se dobla, más o menos, pero no cómo se produce. Queda también cómo cuestión abierta el describir la evolución del sistema desde ese instante hasta el *blow up* final, cuestión que necesitará bastante trabajo numérico y analítico.

Si bien el resultado de las simulaciones parece claro, el modelo ϕ^4 —y también el sG— con estocasticidad espacial deja muchos puntos a resolver concernientes a su tratamiento analítico. Si he de ser sincero, cuando escribo estas líneas no veo cómo se podría hacer una teoría, ni siquiera aproximada, de tal modelo, excepto, tal vez, desde un punto de vista discreto, pero eso supondría enfrentarse a problemas de cálculo estocástico que no sólo no me parecen sencillos sino que creo que no están siquiera bien formalizados, y su rigor es dudoso. Aún así, esa es tal vez la vía que haya que explorar.

En lo tocante a los fenómenos de *scattering* resonante, el panorama parece más claro, excepto por lo que se refiere al modelo ϕ^4 , fundamentalmente al caso en que las impurezas se acoplan al campo linealmente. El papel que el modo interno del *kink* de ϕ^4 y el modo de impureza están desempeñando en el proceso necesita más clarificación, y eso, una vez más, sólo se puede conseguir con más trabajo analítico y numérico. La cuestión más inmediata implicaría desarrollar una manera de incluir el modo de impureza en una teoría perturbativa como la que he presentado en el Capítulo 4.

La última de estas cuestiones que quedan en el aire se refiere al modelo que he discutido en el último capítulo. En este caso, lo que falta es trabajo numérico, resultados de simulaciones, para comparar el cálculo aproximado con la realidad. Las simulaciones necesarias son costosas, puesto que hay que hacerlas sobre sistemas largos, con un número razonable de impurezas y no unas pocas, pero esa sería la única forma de ver cuán precisa es la teoría aproximada, y hasta que grado de sistema diluido es válida. Asimismo, también podrían encontrarse las pistas para mejorar la teoría a través del tratamiento numérico.

Por lo que se refiere al segundo tipo de preguntas que cabe hacerse, las extensiones de este trabajo, hablaré primero de las inmediatas o más directas. Desde luego, el modelo ϕ^4 —y el sG por otros trabajos—, parecen estar comprendidos en parte en cuanto a su perturbación por ruido blanco temporal. El paso obvio para su generalización es estudiar ruidos de color, o sea, con correlación no nula entre distintos instantes, y ver en qué afecta esa correlación a la propagación de *kinks*. Los procesos estocásticos que creo deberían abordarse en primer lugar son los de tipo Ornstein-Uhlenbeck, con distintas longitudes de correlación, o los de tipo *fractional brownian motion*, que por su carácter de persistencia o antipersistencia podrían aportar fenomenología cualitativamente distinta. También ruidos de tipo $1/f$ serían interesante puesto que en mi opinión son de los más realistas —y más ubicuos físicamente—.

La otra cuestión que surge enseguida es estudiar el mismo modelo del capítulo 7, es decir, redes aleatorias de impurezas puntuales, pero en cuanto a propagación de *kinks*. Sobre esa cuestión se trabaja ya en nuestro grupo, pero aún transcurrirá tiempo hasta que se obtengan resultados, aparte de que harán falta otras técnicas distintas para estudiar el problema. De nuevo, también la forma de disponer aleatoriamente las impurezas, y su correlación, son preguntas a las que se debería intentar responder en breve.

Finalmente, el panorama a medio plazo ofrece un sinnúmero de nuevos problemas que abordar, puesto que la Física No Lineal del Desorden está aún naciendo. Como dije en la introducción, modelos más realistas que podrían incluir fractales o redes cuasiperiódicas, proporcionarán materia de investigación durante bastantes años, y su comprensión abrirá con seguridad nuevas puertas desde el punto de vista de las aplicaciones. Asimismo, los nuevos ordenadores permitirán tratar de manera más realista los cálculos, y dar el salto a dos y tres dimensiones espaciales, que es igualmente preciso desde el punto de vista del realismo físico de los modelos. No tengo la menor duda de que en estos campos se harán descubrimientos inesperados y extremadamente novedosos, y por ello no me atrevo a plantear cuestiones abiertas a más largo plazo —en el siglo que viene—. Queden éstas para los noventa.

Referencias

Referencias básicas de la tesis

Una buena parte de los resultados de esta tesis se han presentado en las siguientes referencias:

1. Capítulos 1 y 2:

- “*Nonlinear Wave Propagation In Disordered Media*”. Angel Sánchez y Luis Vázquez. Review invitado en *Int. J. Mod. Phys. B*, en prensa (1991).

2. Capítulo 3:

- “*The stochastic ϕ^4 model*”. Angel Sánchez y Luis Vázquez. Lecture Notes in Physics no. 353: “Nonlinear Coherent Structures”, eds. M. Barthes y J. Leon, pp. 251–259. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 1990.
- “*The Stochastic ϕ^4 Atomic Chain*”. Angel Sánchez y Luis Vázquez. “Applications of Statistical and Field Theory Methods to Condensed Matter Physics”, eds. D. Baeriswyl, A. R. Bishop y J. Carmelo, p. 155. N.A.T.O. A.S.I. Series B Vol. 218, Plenum Press, New York, 1990.
- “*Topological Soliton Dynamics in a Stochastic ϕ^4 Model*”. Angel Sánchez y Luis Vázquez. *Phys. Lett.* **152A**, 184–190 (1991) .
- “*Dynamics of a Stochastically Perturbed ϕ^4 Model*”. Angel Sánchez and Luis Vázquez. Springer Proceedings in Physics: “Nonlinearity with Disorder”, eds. F. Kh. Abdullaev, A. R. Bishop y St. Pnevmatikos. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, en prensa (1991).
- “*Dynamics of a ϕ^4 Kink in the presence of Strong Potential Fluctuations, Dissipation and Boundaries*”. Angel Sánchez, Luis Vázquez y Vladimir V. Konotop. *Phys. Rev. A* **43**, en prensa.

3. Capítulo 4:

- “*Kink dynamics in the weakly stochastic ϕ^4 model.*” Vladimir V. Konotop, Angel Sánchez y Luis Vázquez. *Phys. Rev. B* **44**, en prensa.

4. Capítulo 6:

- *"Resonances in Nonlinear Klein-Gordon Kink Scattering by Impurities"*. Yuri S. Kivshar, Angel Sánchez y Luis Vázquez. Lecture Notes in Physics: "Proceedings of 7th Interdisciplinary Workshop on Nonlinear Coherent Structures in Physics and Biology", eds. M. Peyrard y M. Remoissenet. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, en prensa (1992).

5. Capítulo 7:

- *"Localization Decay Induced by Strong Nonlinearity in Disordered Systems"*. Yuri S. Kivshar, Sergei A. Gredeskul, Angel Sánchez y Luis Vázquez. Phys. Rev. Lett. **64**, 1693-1696 (1990).
- *"Decay of Localization Effects by Nonlinearity in Disordered Systems"*. Yuri S. Kivshar, Sergei A. Gredeskul, Angel Sánchez y Luis Vázquez. "Proceedings of IV International Workshop on Nonlinear and Turbulent Processes in Physics: Nonlinear World", ed. V. M. Chernovsenko. World Scientific Publishing Co., en prensa (1991).
- *"Scattering Properties of Envelope Solitons in Disordered Systems: Decay of Localization Effects by Strong Nonlinearity"*. Yuri S. Kivshar, Sergei A. Gredeskul, Angel Sánchez y Luis Vázquez. Enviado a Waves in Random Media.

Referencias generales (en orden alfabético).

- Abdullaev, F. Kh., A. R. Bishop y St. Pnevmatikos (eds.), 1991, *Springer Proceedings in Physics: "Nonlinearity with Disorder"* (Springer, Berlin-Heidelberg), en prensa.
- Ablowitz, M. J., D. J. Kaup, A. C. Newell y H. Segur, 1973, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1262.
- Ablowitz, M. J., D. J. Kaup, A. C. Newell y H. Segur, 1974, *Phys. Rev. Lett.* **31**, 125.
- Ablowitz, M. J. y J. R. Ladik, 1975, *J. Math. Phys.* **16**, 598.
- Ablowitz, M. J. y J. R. Ladik, 1976, *J. Math. Phys.* **17**, 1011.
- Ablowitz, M. J., M. D. Kruskal y J. R. Ladik, 1979, *SIAM J. Appl. Math.* **36**, 478.
- Aharony, A. y J. Feder (eds.), 1989, *Fractals in Physics: Essays in Honour of Benoit B. Mandelbrot*. *Physica*, volumen **38D**.
- Anderson, P. W., 1958, **109**, 1492.
- Anker, D. y N. C. Freeman, 1978, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **360**, 592.
- Aubry, S., 1975, *J. Chem. Phys.* **62**, 3217.
- Aubry, S., 1976, *J. Chem. Phys.* **64**, 3392.
- Balakrishnan, R., 1985, *Physica* **16D**, 405.
- Barabanenkov, Yu. N., Yu. A. Kratsov, S. M. Rytov y V. I. Tamarskii, 1970, *Usp. Fiz. Nauk.* **102**, 3 [*Sov. Phys. Usp.* **13**, 55 (1971)].
- Barone, A. y G. Paternó, 1982, *Physics and Applications of the Josephson Effect* (Wiley, New York).
- Barthes, M. y J. Léon (eds.), 1990, *Lecture Notes in Physics no. 353: "Nonlinear Coherent Structures"* (Springer, Berlin-Heidelberg).
- Bar'yakhtar, V. G., B. A. Ivanov y A. L. Sukstankiĭ, 1980, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **79**, 1509 [*Sov. Phys. JETP* **51**, 757 (1980)].

- Bass, F. G., Yu. S. Kivshar, V. V. Konotop y Yu. A. Sinitsyn, 1988, Phys. Rep. **157**, 63.
- Bass, F. G., V. V. Konotop y Yu. A. Sinitsyn, 1984, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Radiofiz. **27**, 718 [Sov. J. Radiophys. Elec. **27**, 491 (1984)].
- Bass, F. G., V. V. Konotop y Yu. A. Sinitsyn, 1985, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **88**, 541 [Sov. Phys. JETP **61**, 318 (1985)].
- Bass, F. G., V. V. Konotop y Yu. A. Sinitsyn, 1986, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Radiofiz. **29**, 921 [Sov. J. Radiophys. Elec. **29**, 708 (1987)].
- Bass, F. G. y Yu. A. Sinitsyn, 1982, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Radiofiz. **25**, 1302 [Sov. J. Radiophys. Elec. **25**, 933 (1982)].
- Bass, F. G. y A. P. Tetertov, 1986, Phys. Rep. **140**, 237.
- Beloshapkin, V. V., G. P. Berman y A. G. Tretyakov, 1989, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **95**, 723 [Sov. Phys. JETP **68**, 410 (1989)].
- Benjamin, T. B., 1967, Proc. Roy. Soc. London Ser. A, **299**, 59.
- Benjamin, T. B. y J. E. Feir, 1967, J. Fluid Mech. **27**, 417.
- Bergmann, D. J., E. Ben-Jacob, Y. Imry y K. Maki, 1983, Phys. Rev. A **27**, 3345.
- Bernasconi, J. y T. Schneider (eds.), 1981, *Physics in One Dimension*, Springer Series in Solid State Sciences no. 23 (Springer, Berlin-Heidelberg).
- Biller, P. y F. Petruccione, 1990, Phys. Rev. B **41**, 2139.
- Bishop, A. R., D. K. Campbell y St. Pnevmatikos (eds.), 1989, *Springer Proceedings in Physics vol. 39: "Disorder and Nonlinearity"* (Springer, Berlin-Heidelberg).
- Bishop, A. R., E. Domany y J. A. Krumhansl, 1977, Ferroelectrics **16**, 183.
- Bishop, A. R., J. A. Krumhansl y S. E. Trullinger, 1980, Physica **1D**, 1.
- Bishop, A. R. y W. F. Lewis, 1978, J. Phys. C **12**, 3811.
- Bishop, A. R. y T. Schneider (eds.), 1978, *Solitons and Condensed Matter Physics*, Springer Series in Solid State Sciences no. 8 (Springer, Berlin-Heidelberg).

- Boesch, R. y C. R. Willis, 1989, *Phys. Rev. B* **39**, 361.
- Boesch, R., C. R. Willis y M. El-Batanouny, 1989, *Phys. Rev. B* **40**, 2284.
- Bogdan, M. M., A. M. Kosevich y V. P. Voronov, 1990, en *Solitons and Applications*, editado por V. G. Makhankov, V. K. Fedyanin y O. K. Pashaev (World Scientific, Singapore).
- Bogdan, M. M., A. M. Kosevich, 1990, en *Solitons and Applications*, editado por V. G. Makhankov, V. K. Fedyanin y O. K. Pashaev (World Scientific, Singapore).
- Bountis, T., St. Pnevmatikos y S. Protogerakis, 1990, en *Lecture Notes in Physics no. 353: "Nonlinear Coherent Structures"*, editado por M. Barthes y J. Léon (Springer, Berlin-Heidelberg).
- Bountis, T. y St. Pnevmatikos, 1990, *Phys. Lett.* **143A**, 221.
- Boussinesq, J., 1872, *J. Math. Pures Appl. ser. 2* **17**, 55.
- Boyd, J., 1990, *Nonlinearity* **3**, 177.
- Braun, O. M. y Yu. S. Kivshar, 1990, *Phys. Lett.* **149A**, 119.
- Braun, O. M. y Yu. S. Kivshar, 1991, *Phys. Rev. B.* **43**, 1060.
- Bullough, R. K. y P. J. Caudrey, 1978, en *Nonlinear Evolution Equations Solvable by the Inverse Spectral Transform*, editado por F. Calogero (Pitman, London).
- Burgers, J. M., 1974, *The Nonlinear Diffusion Equation* (Reidel, Dordrecht).
- Campbell, D. K., J. F. Schonfeld y C. A. Wingate, 1983, *Physica* **9D**, 1.
- Campbell, D. K. y M. Peyrard, 1986, *Physica* **18D**, 47.
- Campbell, D. K., Flesch, R. J., Zhang Fei y L. Vázquez, 1991, to be published.
- Caputo, J. G., A. C. Newell y M. Shelley, 1989, en *Lecture Notes in Physics no. 342: "Integrable Systems and Applications"*, editado por M. Balabane, P. Lochak y C. Sulem (Springer, Berlin-Heidelberg).
- Chernov, L. A., 1960, *Wave Propagation in Random Medium* (McGraw-Hill, New York).

- Chiao, R. I., E. Garmire y C. H. Townes, 1964, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 479.
- Cole, J. D., 1959, *J. Appl. Math.* **9**, 225.
- Collins, M. A., A. Blumen, J. F. Currie y J. Ross, 1979, *Phys. Rev. B* **19**, 3630.
- Combs, J. A. y S. Yip, 1983, *Phys. Rev. B* **28**, 6873.
- Combs, J. A. y S. Yip, 1984, *Phys. Rev. B* **29**, 438.
- Corones, J., 1977, *Phys. Rev. B* **16**, 1763.
- Currie, J. F., A. Blumen, M. A. Collins y J. Ross, 1979, *Phys. Rev. B* **19**, 3645.
- Currie, J. F., S. E. Trullinger, A. R. Bishop y J. A. Krumhansl, 1977, *Phys. Rev. B* **15**, 5567.
- Dashen, R. F., B. Hasslacher y A. Neveu, 1974, *Phys. Rev. D* **10**, 4114.
- Davey, A. y K. Stewartson, 1974, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **338**, 101.
- Davydov, A. S., 1985, *Solitons in Molecular Systems* (Reidel, Dordrecht).
- Denardo, B., W. Wright, S. Putterman y A. Larraza, 1990, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1518.
- Devillard, P. y B. Souillard, 1986, *J. Stat. Phys.* **43**, 423.
- de Gennes, P. G., 1966, *Superconductivity of Metals and Alloys* (Benjamin, New York).
- Dodd, R. K., J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon y H. C. Morris, 1982, *Solitons and Nonlinear Wave Equations* (Academic, London).
- Douçot, B. y R. Rammal, 1986, *Europhys. Lett.* **3**, 969.
- Douçot, B. y R. Rammal, 1987, *J. Phys. (Paris)* **48**, 509.
- Economou, E. N., 1983, *Green's Functions in Quantum Physics* (Springer, Berlin-Heidelberg).
- Economou, E. N., 1990, *Physica* **167A**, 215.
- Eilenberger, G., 1977, *Z. Phys. B* **27**, 199.

- Elliot, R. J., J. A. Krumhansl y P. L. Leath, 1974, *Rev. Mod. Phys.* **46**, 465.
- Enz, V., 1964, *Helv. Phys. Acta* **37**, 245.
- Feder, J. 1988, *Fractals* (Plenum, New York).
- Fermi, E., J. R. Pasta y S. M. Ulam, 1955, Los Alamos National Laboratory Report LA-1940, 1955 (unpublished); also *Collected Works of Enrico Fermi*, Vol. II, p. 978 (University of Chicago, Chicago, 1965).
- Flesch, R. J. y S. E. Trullinger, 1987, *J. Math. Phys.* **28**, 1619.
- Flytzanis, N., St. Pnevmatikos y M. Remoissenet, 1985, *J. Phys. C* **18**, 4603.
- Fogel, M. B., S. E. Trullinger, A. R. Bishop y J. A. Krumhansl, 1976, *Phys. Rev. Lett* **36**, 1411.
- Fogel, M. B., S. E. Trullinger, A. R. Bishop y J. A. Krumhansl, 1977, *Phys. Rev. B* **15**, 1578.
- Fraggis, T. y St. Pnevmatikos, 1989, en *Singular Behavior and Nonlinear Dynamics* (vol. 2), editado por St. Pnevmatikos, T. Bountis y Sp. Pnevmatikos (World Scientific, Singapore).
- Fraggis, T., St. Pnevmatikos y E. N. Economou, 1989, *Phys. Lett.* **142A**, 361.
- Freylikher, V. D. y S. A. Gredeksul, 1991, en *Progress in Optics vol. XXVIII*, editado por E. Wolf, en prensa.
- Frenkel, J. y T. R. Kontorowa, 1939, *J. Phys. Sowetjunion* **1**, 137.
- Fried, B. D. y Y. H. Ichikawa, 1973, *J. Phys. Soc. Jpn.* **34**, 1073.
- Galindo, A. y P. Pascual, 1989, *Mecánica Cuántica*, vol. I (Eudema, Madrid).
- Gardner, C. S., J. M. Green, M. D. Kruskal y R. M. Miura, 1967, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1095.
- Gardiner, C. W., 1983, *Handbook of Stochastic Methods*, Springer Series in Synergetics no. 3 (Springer, Berlin-Heidelberg).
- Golubov, A. A., I. L. Serpuchenko y A. V. Ustinov, 1988, *Phys. Lett.* **130A**, 107.

- Gordon, A., 1987, *Physica* **B146**, 373.
- Gordon, A., 1989, *Solid State Comm.* **69**, 1113.
- Gorentsveig, V. I., Yu. S. Kivshar, A. M. Kosevich y E. S. Syrkin, 1990, *Phys. Lett.* **144A**, 479.
- Gredeskul, S. A. y L. A. Pastur, 1985, *J. Stat. Phys.* **38**, 25.
- Gredeskul, S. A. y Yu. S. Kivshar, 1991, *Phys. Rep.*, en prensa.
- Grüner, G. y A. Zettl, 1985, *Phys. Rep.* **119**, 117.
- Guinea, F., 1984, *Phys. Rev. B* **30**, 1884.
- Guo Ben Yu, 1986, *J. Comp. Math.* **4**, 121.
- Guo Ben Yu y L. Vázquez, 1983, *J. App. Sci. (China)* **1**, 25.
- Hasegawa, A., 1988, *Optical Fibers and Solitons* (Springer, Berlin-Heidelberg).
- Hasegawa, A. y F. D. Tappert, 1973a, *Appl. Phys. Lett.* **23**, 142.
- Hasegawa, A. y F. D. Tappert, 1973b, *Appl. Phys. Lett.* **23**, 171.
- Haus, H. A. y M. N. Islam, 1985, *IEEE J. Qu. Elec.* **21**, 1172.
- Heeger, A. J., S. Kivelson, J. R. Schrieffer y W.-P. Su, 1988, *Rev. Mod. Phys.* **60**, 781.
- Herbst, B. M. y M. J. Ablowitz, 1989a, en *Lecture Notes in Physics no. 342: "Integrable Systems and Applications"*, editado por M. Balabane, P. Lochak y C. Sulem (Springer, Berlin-Heidelberg).
- Herbst, B. M. y M. J. Ablowitz, 1989b, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 2065.
- Herbst, B. M., J. L. Morris y A. R. Mitchell, 1985, *J. Comp. Phys.* **60**, 282.
- Hernández-García, E., 1989, Tesis doctoral, Universitat de les Illes Balears.
- Hernández-García, E., Pesquera, L., Rodríguez, M. A. y San Miguel, M., 1989a, *J. Stat. Phys.* **55**, 1027.
- Hernández-García, E., Rodríguez, M. A. y San Miguel, M., 1989b, *Phys. Rev. B* **40**, 9056.

- Hirota, R. y K. Suzuki, 1973, Proc. IEEE **61**, 1483.
- Hopf, E., 1950, Comm. Pure Appl. Math **3**, 201.
- Ichikawa, Y. H., T. Imamura y T. Taniuti, 1972, J. Phys. Soc. Jpn. **33**, 189.
- Ilyinikh, A. I. y B. Ya. Shapiro, 1990, Phys. Lett. **150A**, 409.
- Imada, M., 1981, J. Phys. Soc. Jpn. **50**, 1457.
- Ivanov, B. A. y A. K. Kolezhuk, 1990, Phys. Lett. **146A**, 190.
- Jackiw, R. y J. R. Schrieffer, 1981, Nucl. Phys. B **190**[FS3], 253.
- Janot, C., J.-M. Dubois y M. de Boissieu, 1989, Am. J. Phys. **57**, 972.
- Jiménez, S., 1988, Tesis doctoral, Universidad Complutense.
- Jiménez, S., 1990, en preparación.
- Jiménez, S. y Vázquez, L., 1990, Appl. Math. Comp. **35**, 61.
- Jiménez, S. y Vázquez, L., 1991, en *Proceedings of "Nonlinear Problems in Future Particle Accelerators"* (World Scientific, Singapore) en prensa.
- Ji-Zhong Xu, 1990, Solid State Comm. **76**, 557.
- Kadomtsev, B. B. y V. I. Petviashvili, 1970, Dokl. Akad. Nauk **192**, 753 [Sov. Phys. Dokl. **15**, 539, 1970].
- Karpman, V. I., 1977, Pis'ma ZETF **25**, 296 [JETP Letters, **25**, 271 (1977)].
- Karpman, V. I. y E. M. Maslov, 1977, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **73**, 537 [Sov. Phys. JETP **46**, 281 (1978)]
- Karpman, V. I. y E. M. Maslov, 1978, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **75**, 504 [Sov. Phys. JETP **48**, 252 (1978)]
- Kaup, D. J., 1976, SIAM J. Appl. Math. **31**, 121.
- Kaup, D. J., 1983, Phys. Rev. B **27**, 6787.
- Kaup, D. J. y A. C. Newell, 1978, Proc. Roy. Soc. London Ser. A, **361**, 413.
- Kaup, D. J. y E. Osman, 1986, Phys. Rev. B **33**, 1762.
- Kelley, P. L., 1965, Phys. Rev. Lett. **15**, 1005.

- Kesten, H. y G. C. Papanicolau, 1980, *Comm. Math. Phys.* **78**, 19.
- Kirsch, W., en *Lecture Notes in Mathematics no. 1109: "Stochastic Aspects of Classical and Quantum Systems"*, editado por S. Albeverio, Ph. Combe y M. Sirugue-Collen (Springer, Berlin-Heidelberg).
- Kitchenside, P. W., R. K. Bullough y P. J. Caudrey, 1978, en *Solitons and Condensed Matter Physics*, editado por A. R. Bishop y T. Schneider, Springer Series in Solid State Sciences no. 8 (Springer, Berlin-Heidelberg).
- Kivshar, Yu. S., 1984, Preprint ILTP/21-84.
- Kivshar, Yu. S., 1991a, *Phys. Rev. B* **43**, 3493.
- Kivshar, Yu. S., 1991b, en *Springer Proceedings in Physics: "Nonlinearity with Disorder"*, editado por F. Kh. Abdullaev, A. R. Bishop y St. Pnevmatikos (Springer, Berlin-Heidelberg) en prensa.
- Kivshar, Yu. S. y O. A. Chubykalo, 1991, *Phys. Rev. B*, en prensa.
- Kivshar, Yu. S., V. V. Konotop y Yu. A. Sinitsyn, 1986, *Z. Phys. B* **65**, 209.
- Kivshar, Yu. S., A. M. Kosevich y O. A. Chubykalo, 1987a, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **93**, 968 [*Sov. Phys. JETP* **66**, 545 (1987)].
- Kivshar, Yu. S., A. M. Kosevich y O. A. Chubykalo, 1987b, *Phys. Lett.* **125A**, 35.
- Kivshar, Yu. S., A. M. Kosevich y O. A. Chubykalo, 1988, *Phys. Lett.* **129A**, 449.
- Kivshar, Yu. S., A. M. Kosevich y O. A. Chubykalo, 1991, *Phys. Rev. B* (submitted).
- Kivshar, Yu. S. y B. A. Malomed, 1988a, *J. Phys. A* **21**, 1553.
- Kivshar, Yu. S. y B. A. Malomed, 1988b, *Phys. Lett* **129A**, 443.
- Kivshar, Yu. S. y B. A. Malomed, 1989, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 763.
- Kivshar, Yu. S. y B. A. Malomed, 1990, *Phys. Rev. B* **42**, 8561.
- Kivshar, Yu. S., B. A. Malomed y A. A. Nepomnyashchiĭ, 1988, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **94**, 356 [*Sov. Phys. JETP* **67**, 850 (1988)].

- Kivshar, Yu. S. y T. K. Soboleva, 1990a, Phys. Rev. B **42**, 2655.
- Kivshar, Yu. S. y T. K. Soboleva, 1990b, Physica B **165&166**, 1651.
- Kivshar, Yu. S., Zhang Fei y L. Vázquez, 1991, Phys. Rev. Lett. (submitted).
- Kjems, J. K. y M. Steiner, 1978, Phys. Rev. Lett. **41**, 1137.
- Knapp, R., G. Papanicolaou, y B. White, 1989, en *Nonlinearity and Disorder*, editado por A. R. Bishop, D. K. Campbell y St. Pnevmatikos, Springer Series in Solid State Science (Springer-Verlag, Berlin).
- Korteweg, D. J. y G. de Vries, 1895, Phil. Mag. **39**, 442.
- Krug, J. y H. Spohn, 1989, Europhys. Lett. **8**, 219.
- Krumhansl, J. A. y J. R. Schrieffer, 1975, Phys. Rev. B **11**, 3535.
- Kulik I. O., 1967, Zh. Tekh. Fiz. **37** 157 [Sov. Phys. Tech. Phys. **12**, 111 (1967)].
- Kunz H. y B. Souillard, 1980, Comm. Math. Phys. **78**, 201.
- Kunz, C. y J. A. Combs, 1985, Phys. Rev. B **31**, 527.
- Lakshmanan, M., 1977, Phys. Lett. **61A**, 53.
- Lax P. D., 1968, Commun. Pure Appl. Math. **21**, 467.
- Lebwohl, P. y M. J. Stephen, 1967, Phys. Rev. **163**, 376.
- Lee., P. A. y T. V. Ramakrishnan, 1985, Rev. Mod. Phys. **57**, 291.
- Lee, P. A., T. M. Rice y P. W. Anderson, 1974, Solid State Comm. **14**, 703.
- Lifshitz, I. M., S. A. Gredeskul y L. A. Pastur, 1988, *Introduction to the Theory of Disordered Systems* (Wiley, New York).
- Longrenn, K. y A. C. Scott (eds.), 1978, *Solitons in Action* (Academic, New York).
- Lorenz, E. N., 1963, J. Atmos. Sci. **20**, 130.
- Madhukar, A. A. y W. Post, 1977, Phys. Rev. Lett. **39**, 1424.
- Makhankov, V. G., 1978, Phys. Rep. **35**, 1.

- Maki, K., 1978, en *Solitons and Condensed Matter Physics*, editado por A. R. Bishop y T. Schneider, Springer Series in Solid State Sciences no. 8 (Springer, Berlin-Heidelberg).
- Makinson, R. E. B. y A. P. Roberts, 1962, Proc. Roy. Soc. London **79**, 223.
- Malomed, B. A., 1987a, Physica **27D**, 113.
- Malomed, B. A., 1987b, Phys. Lett **123A**, 459.
- Malomed, B. A., 1987c, Phys. Lett **123A**, 494.
- Malomed, B. A., 1988, J. Phys. C **21**, 5163.
- Malomed, B. A., 1990a, en *Solitons and Applications*, editado por V. G. Makhankov, V. K. Fedyanin y O. K. Pashaev (World Scientific, Singapore).
- Malomed, B. A., 1990b, Phys. Lett. **144A**, 351.
- Malomed, B. A., 1990c, Phys. Rev. B **41**, 2616.
- Malomed, B. A. y A. A. Nepomnyashchiĭ, 1991, J. Phys. Condens. Matter **3**, 693.
- Malomed, B. A., Oboznov, V. A. y A. V. Ustinov, 1990, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **97**, 924 [Sov. Phys. JETP **70**, 518 (1990)].
- Malomed, B. A. y M. I. Tribelsky, 1990, Phys. Rev. B **41**, 11271.
- Malomed, B. A. y A. V. Ustinov, 1990a, en *Solitons and Applications*, editado por V. G. Makhankov, V. K. Fedyanin y O. K. Pashaev (World Scientific, Singapore).
- Malomed, B. A. y A. V. Ustinov, 1990b, J. Appl. Phys. **67**, 3791.
- Malomed, B. A. y A. V. Ustinov, 1990c, Phys. Rev. B **41**, 254.
- Mandelbrot, B. B., 1975, *Les Objects Fractals: Forme, Hasard et Dimension* (Flammarion, Paris).
- Mandelbrot, B. B., 1982 *The Fractal Geometry of Nature* (Freeman, San Francisco).
- Marchesoni, F. y L. Vázquez, 1985, Physica **14D**, 273.
- Marchesoni, F. y C. R. Willis, 1990, Europhys. Lett. **12**, 491.

- Kivshar, Yu. S. y T. K. Soboleva, 1990a, Phys. Rev. B **42**, 2655.
- Kivshar, Yu. S. y T. K. Soboleva, 1990b, Physica **B165&166**, 1651.
- Kivshar, Yu. S., Zhang Fei y L. Vázquez, 1991, Phys. Rev. Lett. (submitted).
- Kjems, J. K. y M. Steiner, 1978, Phys. Rev. Lett. **41**, 1137.
- Knapp, R., G. Papanicolaou, y B. White, 1989, en *Nonlinearity and Disorder*, editado por A. R. Bishop, D. K. Campbell y St. Pnevmatikos, Springer Series in Solid State Science (Springer-Verlag, Berlin).
- Korteweg, D. J. y G. de Vries, 1895, Phil. Mag. **39**, 442.
- Krug, J. y H. Spohn, 1989, Europhys. Lett. **8**, 219.
- Krumhansl, J. A. y J. R. Schrieffer, 1975, Phys. Rev. B **11**, 3535.
- Kulik I. O., 1967, Zh. Tekh. Fiz. **37** 157 [Sov. Phys. Tech. Phys. **12**, 111 (1967)].
- Kunz H. y B. Souillard, 1980, Comm. Math. Phys. **78**, 201.
- Kunz, C. y J. A. Combs, 1985, Phys. Rev. B **31**, 527.
- Lakshmanan, M., 1977, Phys. Lett. **61A**, 53.
- Lax P. D., 1968, Commun. Pure Appl. Math. **21**, 467.
- Lebwohl, P. y M. J. Stephen, 1967, Phys. Rev. **163**, 376.
- Lee., P. A. y T. V. Ramakrishnan, 1985, Rev. Mod. Phys. **57**, 291.
- Lee, P. A., T. M. Rice y P. W. Anderson, 1974, Solid State Comm. **14**, 703.
- Lifshitz, I. M., S. A. Gredeskul y L. A. Pastur, 1988, *Introduction to the Theory of Disordered Systems* (Wiley, New York).
- Longrenn, K. y A. C. Scott (eds.), 1978, *Solitons in Action* (Academic, New York).
- Lorenz, E. N., 1963, J. Atmos. Sci. **20**, 130.
- Madhukar, A. A. y W. Post, 1977, Phys. Rev. Lett. **39**, 1424.
- Makhankov, V. G., 1978, Phys. Rep. **35**, 1.

Maki, K., 1978, en *Solitons and Condensed Matter Physics*, editado por A. R. Bishop y T. Schneider, Springer Series in Solid State Sciences no. 8 (Springer, Berlin-Heidelberg).

Makinson, R. E. B. y A. P. Roberts, 1962, Proc. Roy. Soc. London **79**, 223.

Malomed, B. A., 1987a, Physica **27D**, 113.

Malomed, B. A., 1987b, Phys. Lett **123A**, 459.

Malomed, B. A., 1987c, Phys. Lett **123A**, 494.

Malomed, B. A., 1988, J. Phys. C **21**, 5163.

Malomed, B. A., 1990a, en *Solitons and Applications*, editado por V. G. Makhankov, V. K. Fedyanin y O. K. Pashaev (World Scientific, Singapore).

Malomed, B. A., 1990b, Phys. Lett. **144A**, 351.

Malomed, B. A., 1990c, Phys. Rev. B **41**, 2616.

Malomed, B. A. y A. A. Nepomnyashchiĭ, 1991, J. Phys. Condens. Matter **3**, 693.

Malomed, B. A., Oboznov, V. A. y A. V. Ustinov, 1990, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **97**, 924 [Sov. Phys. JETP **70**, 518 (1990)].

Malomed, B. A. y M. I. Tribelsky, 1990, Phys. Rev. B **41**, 11271.

Malomed, B. A. y A. V. Ustinov, 1990a, en *Solitons and Applications*, editado por V. G. Makhankov, V. K. Fedyanin y O. K. Pashaev (World Scientific, Singapore).

Malomed, B. A. y A. V. Ustinov, 1990b, J. Appl. Phys. **67**, 3791.

Malomed, B. A. y A. V. Ustinov, 1990c, Phys. Rev. B **41**, 254.

Mandelbrot, B. B., 1975, *Les Objects Fractals: Forme, Hasard et Dimension* (Flammarion, Paris).

Mandelbrot, B. B., 1982 *The Fractal Geometry of Nature* (Freeman, San Francisco).

Marchesoni, F. y L. Vázquez, 1985, Physica **14D**, 273.

Marchesoni, F. y C. R. Willis, 1990, Europhys. Lett. **12**, 491.

- Matsuda, H. y K. Ishii, 1970, *Prog. Theor. Phys.* **45**, 56.
- Mattis, D. C., 1981, en *Physics in One Dimension*, editado por J. Bernasconi y T. Schneider, Springer Series in Solid State Sciences no. 23 (Springer, Berlin-Heidelberg).
- McLaughlin, D. W. y A. C. Scott, 1978, *Phys. Rev. A* **18**, 1652.
- Mkrtchyan, G. S. y V. V. Shmidt, 1979, *Solid State Comm.* **30**, 791.
- Mikeska, H. I., 1978, *J. Phys. C* **11**, L29.
- Mineev, M. B., M. V. Feigel'man y V. V. Shmidt, 1981, *Zh. Eksp. Teor. Fiz* **81**, 290 [*Sov. Phys. JETP* **54**, 155 (1981)].
- Mineev, M. B. y V. V. Shmidt, 1980, *Zh. Eksp. Teor. Fiz* **79**, 893 [*Sov. Phys. JETP* **52**, 453 (1981)].
- Miura, R., 1968, *J. Math. Phys.* **9**, 1202.
- Morse, P. y H. Feshbach, 1953, *Methods of Mathematical Physics* (McGraw-Hill, New York).
- Moshir, M., 1981, *Nucl. Phys. B* **185**, 318.
- Mott, N. F. y W. D. Twose, 1961, *Adv. Phys.* **10**, 107.
- Muroya, K., N. Saitoh y S. Watanabe, 1982, *J. Phys. Soc. Jpn.* **51**, 1024.
- Nabarro, F. R. N., 1967, *Theory of Crystal Dislocations* (Oxford University, Oxford).
- Newell, A. C., 1985, *Solitons in Mathematics y Physics* (SIAM, Philadelphia).
- Novikov, E. A., 1965, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **48**, 2024 [*Sov. Phys. JETP* **20**, 1290 (1965)].
- Oboznov, V. A. y A. V. Ustinov, 1989, *Phys. Lett.* **139A** 481.
- Parrondo, J. M. R., M. Mañas y F. J. de la Rubia, 1990, *J. Phys. A* **23**, 2363.
- Pascual, P. J. y L. Vázquez, 1985, *Phys. Rev. B* **32**, 8305.

- Pascual, P. J., L. Vázquez, St. Pnevmatikos y A. R. Bishop, 1989, en *Springer Proceedings in Physics vol. 39: "Disorder and Nonlinearity"* editado por A. R. Bishop, D. K. Campbell y St. Pnevmatikos (Springer, Berlin-Heidelberg).
- Peierls, R., 1955, *Quantum Theory of Solids* (Clarendon, Oxford).
- Perring, J. K. y T. H. R. Skyrme, 1962, *Nucl. Phys.* **31**, 550.
- Petruccione, F. y P. Biller, 1990, *Phys. Rev. B*, **41**, 2145.
- Peyrard, M. y M. D. Kruskal, 1984, *Physica* **14D**, 88.
- Peyrard, M. y A. R. Bishop, 1990, en *Lecture Notes in Physics no. 353: "Nonlinear Coherent Structures"*, editado por M. Barthes y J. Léon, (Springer, Berlin-Heidelberg).
- Ping Sheng (ed.), 1990, *Scattering and Localization of Classical Waves in Random Media* (World Scientific, Singapore).
- Pouget, J. y G. A. Maugin, 1984a, *Physica* **14D**, 88.
- Pouget, J. y G. A. Maugin, 1984b, *Phys. Rev. B* **30**, 5306.
- Pouget, J. y G. A. Maugin, 1985a, *Phys. Rev. B* **31**, 4633.
- Pouget, J. y G. A. Maugin, 1985b, *Phys. Lett.* **109A**, 389.
- Pnevmatikos, St., 1987, *Phys. Lett.* **122A**, 249.
- Pnevmatikos, St., T. Bountis y Sp. Pnevmatikos (eds.), 1989, *Singular Behavior and Nonlinear Dynamics* (2 vols.) (World Scientific, Singapore).
- Pnevmatikos, St., N. Flytzanis y M. Remoissenet, 1986, *Phys. Rev. B* **33**, 2308.
- Press, W. H., B. P. Flannery, S. A. Teukolsky y W. T. Vetterling, 1989, *Numerical Recipes* (Cambridge, New York).
- Qiming Li, St. Pnevmatikos, E. N. Economou y C. M. Soukoulis, 1988a, *Phys. Rev. B* **37**, 3534.
- Qiming Li, C. M. Soukoulis, St. Pnevmatikos y E. N. Economou, 1988b, *Phys. Rev. B* **38**, 11888.
- Rajaraman, R., 1975, *Phys. Rep.* **21**, 229.

Reinisch, G. y J. C. Fernandez, 1989, en *Singular Behavior and Nonlinear Dynamics*, editado por St. Pnevmatikos, T. Bountis y Sp. Pnevmatikos, vol. 2 (World Scientific, Singapore).

Remoissenet, M., 1986, Phys. Rev. B **33**, 2386.

Remoissenet, M., 1989, en *Lecture Notes in Physics no. 342: "Integrable Systems and Applications"*, editado por M. Balabane, P. Lochak y C. Sulem (Springer, Berlin-Heidelberg).

Remoissenet, M. 1990a, in *Lecture Notes in Physics no. 353: "Nonlinear Coherent Structures"*, editado por M. Barthes y J. Léon, (Springer, Berlin-Heidelberg).

Remoissenet, M., 1990b, en *Proceedings of the Les Houches Winter School in Theoretical Physics on Partially Integrable Nonlinear Equations and their Physical Applications* (Reidel, Dordrecht).

Rice, M. J., 1979, Phys. Lett. **71A**, 153.

Rice, M. J., A. R. Bishop, J. A. Krumhansl y S. E. Trullinger, 1976, Phys. Rev. Lett **36**, 432.

Rice, M. J. y E. J. Mele, 1980, Solid State Comm. **35**, 487.

Rice, M. J. y J. Timonen, 1979, Phys. Lett. **73A**, 3698.

Risken, H., 1984, *The Fokker-Planck Equation*, Springer Series in Synergetics no. 18 (Springer, Berlin-Heidelberg).

Rodríguez-Plaza, M. J., 1988, Tesis doctoral, Universidad Complutense.

Rodríguez-Plaza, M. J. y L. Vázquez, 1988, en *Mathematics+Physics, Lectures on Recent Results no. 3*, editado por L. Streit (World Scientific, Singapore)

Rodríguez-Plaza, M. J. y L. Vázquez, 1990, Phys. Rev. B **41**, 11437.

Roth, S. y H. Bleier, 1987, Adv. Phys. **36**, 385.

Sakai, S., M. R. Samuelsen y O. H. Olsen, 1987, Phys. Rev. B **36**, 217.

Salerno, M., E. Joergensen y M. R. Samuelsen, 1984, Phys. Rev. B **30**, 2635.

Scott Russell, J., 1844, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 319.

- Scott, A. C., 1967, Bull. Am. Phys. Soc. **12**, 308.
- Scott, A. C., 1990, en el prefacio de *Lecture Notes in Physics no. 353: "Nonlinear Coherent Structures"*, M. Barthes y J. Léon (eds.), (Springer, Berlin-Heidelberg).
- Scott, A. C., F. Y. F. Chu y D. W. McLaughlin, 1973, Proc. IEEE **61**, 1443.
- Segur, H. y M. D. Kruskal, 1987, Phys. Rev. Lett. **58**, 747.
- Serpuchenko, I. L. y A. V. Ustinov, 1988, Solid State Comm. **693**, 68. ZETF **46**, 435 [JETP Lett. **46**, 549 (1987)].
- Shimizu, K. y Y. H. Ichikawa, 1972, J. Phys. Soc. Jpn. **33**, 789.
- Sinai, Ya. G., 1987, J. Stat. Phys. **46**, 861.
- Spatschek, K. H., 1987, Fortschr. Phys. **35**, 491.
- Stancioff, P., C. R. Willis, M. El-Batanouny y S. Burdick, 1986, Phys. Rev. B **33**, 1904.
- Steinhardt, P. J. y S. Ostlund, 1987, *The Physics of Quasicrystals* (World Scientific, Singapore).
- Strauss, W. y L. Vázquez, 1978, J. Comp. Phys. **28**, 271.
- Sturrock, P. A., 1966, Phys. Rev. **141**, 186.
- Su, W. P., J. R. Schrieffer y J. A. Heeger, 1979, Phys. Rev. Lett. **42**, 1698.
- Su, W. P., J. R. Schrieffer y J. A. Heeger, 1980, Phys. Rev. B **22**, 2099.
- Tappert, F. D. y C. M. Varma, 1970, Phys. Rev. Lett. **25**, 1108.
- Theodorakopoulos, N., 1979, Z. Phys. B **33**, 385.
- Thouless, D. J., 1974, Phys. Rep. **13**, 93.
- Toda, M., 1967, J. Phys. Soc. Jpn. **22**, 431.
- Toombs, G. A., 1978, Phys. Rep. **40**, 181.
- Tsurui, K., 1977, Prog. Theor. Phys. **48**, 1196.

- van Kampen, N., 1981, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry* (North Holland, Amsterdam).
- Vicsek, T., 1989, *Fractal Growth Phenomena* (World Scientific, Singapore).
- Wada, Y. y J. R. Schrieffer, 1978, Phys. Rev. B **18**, 3897.
- Wadati, M., 1983, J. Phys. Soc. Jpn. **52**, 2642.
- Wadati, M. y Y. Akutsu, 1984, J. Phys. Soc. Jpn. **53**, 3342.
- Wadati, M., 1990, en preparación.
- West, B. J., 1985 *Lecture Notes in Biomathematics no. 62: "An Essay on the Importance of Being Nonlinear"* (Springer, Berlin-Heidelberg).
- Willis, C. R., 1989, Phys. Rev. B **39**, 7067.
- Willis, C. R., M. El-Batanouny y P. Stancioff, 1986, Phys. Rev. B **33**, 1904.
- Whitham, G. B., 1974, *Linear and Nonlinear Waves* (Wiley, New York).
- Wu, J. J. Wheatley, S. Putterman y I. Rudnick, 1987, Phys. Rev. Lett. **59**, 2774.
- Yajima, N. y J. Satsuma, 1979, Prog. Theor. Phys. **62**, 370.
- Zabusky, N. J., 1981, J. Comp. Phys. **43**, 195.
- Zabusky, N. J. y M. D. Kruskal, 1965, Phys. Rev. Lett. **15**, 240.
- Zakharov, V. E., S. V. Manakov, S. P. Novikov y L. P. Pitaevsky, 1984, *Theory of Solitons* (Consultants Bureau, New York) [Primera Edición en Ruso: 1980, Nauka, Moscow].
- Zakharov, V. E. y A. B. Shabat, 1971, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **61**, 118 [Sov. Phys. JETP **34**, 62 (1972)].
- Zettl, A., 1988, en *Methods and Applications of Nonlinear Dynamics*, editado por A. W. Sáenz (World Scientific, Singapore).
- Ziman, J. M., 1979, *Models of Disorder* (Cambridge University, Cambridge).
- Zvezdin, A. K., 1979, Pis'ma ZETF **29**, 605 [JETP Lett. **29**, 553 (1979)].